2020 年 7 月 4 日

物理 試験問題

(120 分)

[注意事項]

1) 問題は I ～ III の 3 問あります。3問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

半径 R, 質量 m の動滑車がロープでつり下げられており, ロープの一端は天井に固定され, 他端は 2 個の定滑車を通したのち質量 M のおもりに固定されている。下図のように, 動滑車及びおもりの重心の位置を x,z とし, 張力 T_1,T_2 及び滑車の回転角 θ を定義する。ロープは滑らず伸縮しないとし, 定滑車の質量は無視できるとする。

以下の問 1~5 に答えなさい。ただし, 重力加速度を g とする。答案には解の導出過程も示しなさい。

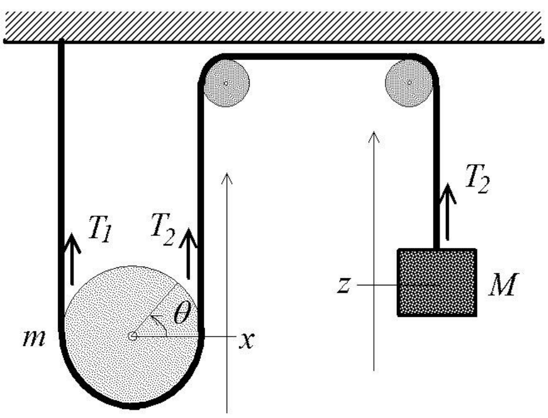
問 1　張力 T_1 を T_2 をつかって, 動滑車及びおもりの鉛直方向の運動方程式を示しなさい。

問 2　張力 T_1 を T_2, M, m 及び g で表しなさい。

問 3　つりあいの状態になるための M, m の条件を示しなさい。

問 4　動滑車の質量面密度は一様であるとして, 慣性モーメントを求めなさい。また, 動滑車の回転に関する運動方程式を示しなさい。

問 5　時刻 $t = 0$ で $z = 0$ にておもりを放したところ, おもりは落下し始めた。おもりの位置 z に関する微分方程式を示し, 任意の時刻 t におけるおもりの位置 z を求めなさい。



II

半径 a の無限に長い円柱状の導線を真空中に設置する。以下の問 1~6 に答えなさい。ただし真空中の誘電率と透磁率を ε_0，μ_0 とする。答案には解の導出過程も示しなさい。

問 1　導線を一本設置し，電荷を与えた。電荷密度 ρ は一定で，線密度を $\pi a^2 \rho = \lambda$ とする。導線の中心線から距離 r 離れた位置での電場の大きさを求め，r の関数として図示しなさい。また電場の向きも答えなさい。

問 2　問 1 のときの r の位置における電位を求めなさい。

問 3　この無限に長く直線上に伸びた半径 a の導線を平行に設置し，それぞれの線密度を λ，$-\lambda$ とする。導線の中心軸間の距離 x は a に比べて十分に大きく，各導線の電荷分布は導線の中心軸に対して対称とする。この二本の導線の電位差を求めなさい。

問 4　問 3 のとき，単位長さあたりの静電容量を求めなさい。

問 5　次に真空中に設置した一本の導線の軸方向に，定常電流 I を流した。導線の中心線から距離 r におけるこの電流が作る磁束密度の大きさと向きを答えなさい。

問 6　問 3 と同様に，距離 x 離れた二本の平行な導線に，逆向きにそれぞれ I の電流を流した。今二本の導線の間に平面を挟む。平面はそれぞれの導線から等しい距離にあるとする。平面上での磁束密度の大きさと向きを求めなさい。

III

以下の問 1〜3 に答えなさい。答案には解の導出過程も示しなさい。

問 1　(1) バネ定数 k のバネから力を受けている質量 m の質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

で与えられる。ここで, x は自然長からのずれを表す。一般解を求めなさい。

(2) この質点が, 外力 $F = ae^{-bt}$ を受けているとする。ここで, a, b は定数である。初期時刻 $t = 0$ に, $x = 0$ で静止していたとして, $x(t)$ を求めなさい。

問 2　運動方程式

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= -2x(t) + y(t)\\ \ddot{y}(t) &= -3y(t) + x(t) + z(t)\\ \ddot{z}(t) &= -2z(t) + y(t)\end{aligned}$$

を, 初期条件 $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ のもとで解きなさい。ここで, ドットは時間微分を表している。

問 3　(1) 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

が成立していることを証明しなさい。

(2) 次の真空中のマクスウェル方程式から電場 $\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式を導きなさい。ここで, c は光速, $\boldsymbol{B}$ は磁束密度である。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$