2017 年 7 月 1 日

物理試験問題

10:00 ～ 12:00

[注意事項]

1) 問題は I ～ III の 3 問あります。 3 問すべてに解答すること。

2) 解答は問題ごとに別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
各解答用紙の以下の欄に問題番号, 受験番号と氏名を記入すること。
「試験科目」欄： 問題番号（I ～ III）を記入すること。
「学籍番号」欄： 受験番号を記入すること。
「氏名」欄： 氏名を記入すること。

3) 試験開始後は試験終了まで退室できません。 また, 試験開始後 30 分を経過した後の入室はできません。

I

質量 M で半径 R の一様な球が水平面上を滑ることなく転がっている。図に示すように，球の重心 G の速さが v_0 の時に高さ h の段差に衝突し，段差との接触点 P で滑ることなく段差を乗り越え始めた。$R > h$，線分 GP と水平方向のなす角を θ，重力加速度を g として以下の問 1 ～ 問 5 に答えなさい。球の紙面に垂直な方向の運動を無視してよい。答案には解答の導出過程も示しなさい。

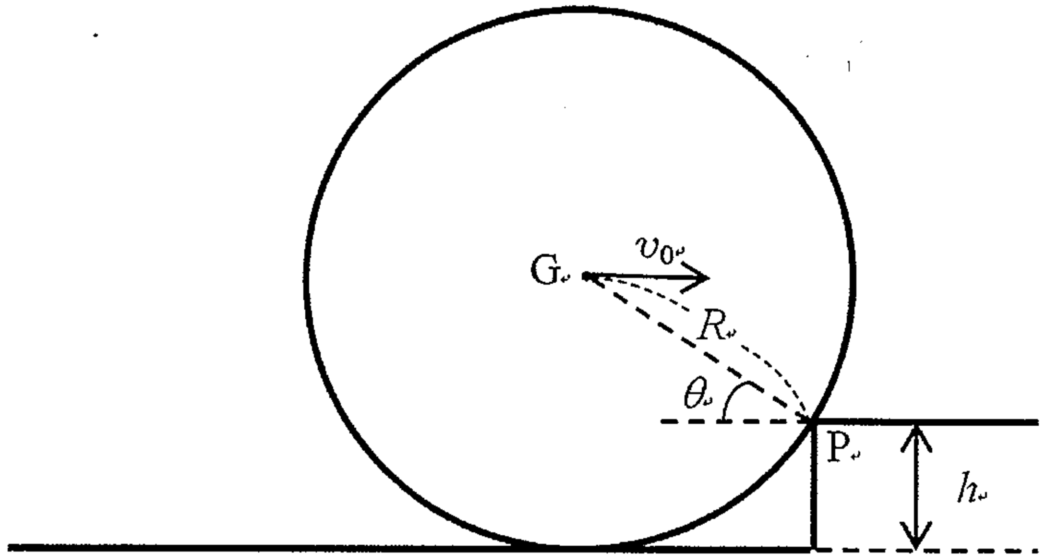
問 1 衝突直前における球の重心 G 周りの角運動量と，重心 G の P 周りの角運動量を求めなさい。

問 2 球の重心 G 周りの慣性モーメントを I とすると，球の P 周りの慣性モーメントは $I + MR^2$ である。このことを考慮して，衝突直後の P 周りの球の角速度 ω を求めなさい。

問 3 球は段差で滑らないので，段差を乗り越える最中に球の力学的エネルギーが保存する。ω を用いて，球の力学的エネルギーの保存式を θ の微分方程式として示しなさい。

問 4 $I = \dfrac{2}{5}MR^2$ となることを，計算して示しなさい。

問 5 球が段差を登りきるのに必要な v_0 の最小値を g, R, h を用いて表しなさい。



G
v_0
R
θ
P
h

II

真空中で半径 a の金属球殻の中心が，座標の原点 $(0,0,0)$ になるように固定されている。以下の問題に答えなさい。問題の解答に必要な物理量，物理定数があれば，それを表す記号はすべて各自が定義し，解答用紙に明示しなさい。また，解答の導出過程も示しなさい。

問 1 金属球殻に電荷 Q を与えると，電荷は球殻表面に一様に分布する。その理由を定性的に説明しなさい。また，球殻表面の電荷密度を答えなさい。

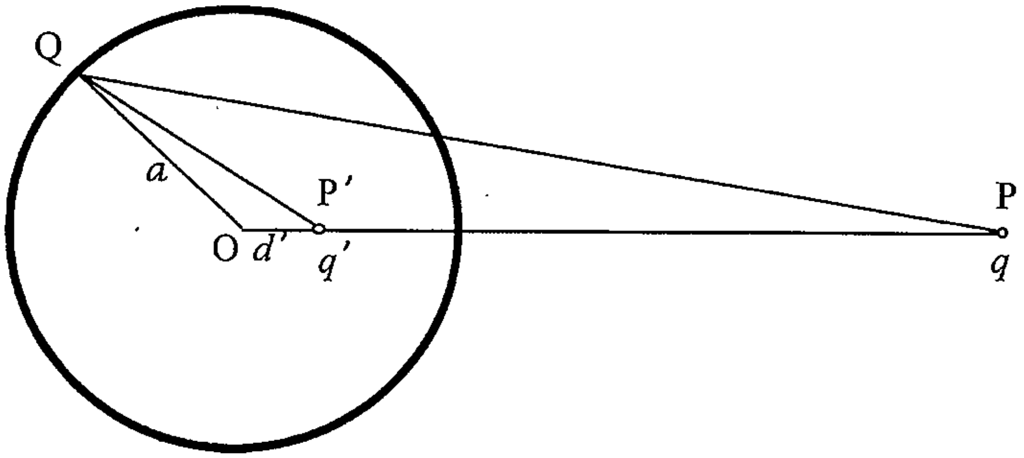
問 2 問 1 における球殻内外の電場はどうなるか，ガウスの法則を用いて導出し，電場の様子を図示しなさい。また，その電場を，原点を始点とする位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて表記しなさい。さらに，球殻外側表面の電場と，問 2 で求めた球殻表面の電荷密度との関係を答えなさい。

次に，金属球殻を接地し，球殻の外側で原点から d の距離に点電荷 q を置く。以下の問に答えなさい。

問 3 この時，球殻表面の電位と，球殻内部の電場はどうなるか答えなさい。

問 4 球殻の代わりに，球殻表面の電位を満たすような仮想点電荷 q' を置いて球殻外部の電場を求めることができる。これを電気映像法という。そこで，次ページ図のように q' を原点から点電荷 q の方向へ $d' = a^2/d$ ずらした位置に置く。この時，三角形 OQP' と三角形 OPQ が相似になることを示しなさい。

問 5 上の結果を用いて仮想点電荷 q' を求めなさい。ただし，その導出過程を示しなさい。


Q
a
P'
O
d'
q'
P
q

III

以下の問 1～ 問 3 に答えなさい。答案には解の導出過程も示しなさい。

問 1 バネ定数 k のバネに繋がれた質量 m の質点の運動を考える。自然長の時の位置を原点として，位置 x が従う運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

のように与えられる。初期時刻 $t=0$ で，$x=A$，その後の時刻 $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ においては，$x=\frac{A}{2}$ であった。$A=1\mathrm{cm}$，$m=10\mathrm{g}$，$k=0.4\mathrm{N/mm}$ としたとき，初期時刻に与えた速度を求めなさい。

問 2 重力加速度 g の一様な重力場中に，分子量 M の理想気体があり，絶対温度 T の熱平衡状態にある。

(1) 地表よりの高さ z の地点における質量密度を $\rho(z)$ としたとき，微小な高度変化 dz に応じた圧力変化 $dp(z)$ を求めなさい。

(2) 気体定数を R として，状態方程式を書きなさい。

(3) $z=0$ における圧力を p_0 として，圧力 $p(z)$ を高さ z の関数として表す式を書きなさい。

問 3 x 軸の正の方向に大きさ E の一様な電場，z 軸の正の方向に大きさ B の一様な磁束密度があり，その中を質量 m，電荷 q の荷電粒子が運動する。ただし、時刻 $t=0$ では，$x=a$，$y=0$，$z=0$ の位置に静止していたとする。

(1) この荷電粒子の運動方程式を書きなさい。

(2) エネルギー保存の式を書きなさい。また，初期条件を考慮して全エネルギーを決めなさい。

(3) 運動方程式を一回積分し，荷電粒子の y 軸方向の速度がゼロまたは負となるこ

とを示しなさい。

(4) 新たな変数 $X = x - a - \dfrac{mE}{qB^2}$ と $Y = y + \dfrac{E}{B}t$ を定義し, これらの満たす方程式を解き, x, y, z を時間の関数として求めなさい。