2025 年 8 月 19 日

物理 II 試験問題
(120 分)

[注意事項]

1. 問題は I～III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。

2. 解答は問題ごとに別の解答用紙(計 3 枚)に記入すること。

3. 各解答用紙に受験番号と氏名, 問題番号を記入すること。

4. 試験開始後は退室できません。

I

1 次元空間上 $(-\infty < x < \infty)$ の量子状態を表す波動関数 $\psi(x,t)$ が，時刻 $t=0$ では定数 A, q および k を含む波束

$$\psi(x,0) = A\exp\left[-\frac{(x-q)^2}{2d^2} + ikx\right]$$

で表されている。粒子の質量は m であり，粒子にはたらくポテンシャルは x によらず 0 であるとする。以下の問 1 ～ 4 に答えなさい。

問 1　$\psi(x,0)$ が規格化されている場合に，定数 A の値を求めなさい。

問 2　$t=0$ での，位置と運動量の期待値を，それぞれ求めなさい。

問 3　$t=0$ での，エネルギーの期待値を求めなさい。

問 4　d が十分に大きい場合に，波の位相速度と波束の群速度を，それぞれ求めなさい。

II

格子点に原子が規則正しく配置された完全結晶とは異なり，実際の結晶中では図に示すように格子間位置への原子の移動による配置の乱れが存在する。格子点が N 個ある結晶を考え，原子の個数も N 個であるとする。原子が移動できる格子間位置は M 個あり、どの格子点から原子が外れてどの格子間位置に移動する場合でも，移動に要するエネルギーは 1 原子あたり w である。n 個の原子が外れ，どこかに移動するような乱れについて、以下の問 1 ～ 5 に答えなさい。ただし、$1 \ll n \ll N$ かつ $1 \ll n \ll M$ が成り立ち、ボルツマン定数を k_B とする。

問 1　原子が上記のように移動する場合の数を求めなさい。

問 2　原子が上記のように移動する場合のエントロピーを求めなさい。また，温度 T の熱平衡状態におけるヘルムホルツの自由エネルギーを求めなさい。

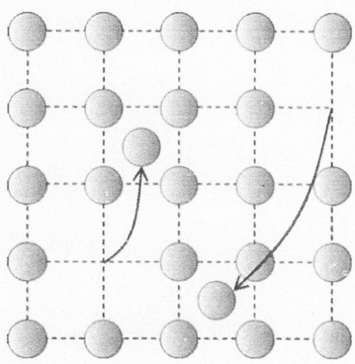
問 3　$w \gg k_B T$ の温度領域における熱平衡状態では，$n \approx \sqrt{NM}\exp\left(-\dfrac{w}{2k_B T}\right)$ と表されることを示しなさい。必要であれば，$x \gg 1$ について成り立つ近似式である $\log_e x! \approx x\log_e x - x$ を用いてよい。

問 4　問 3 のときの比熱を求めなさい。

問 5　非磁性金属である金の場合，$w/k_B = 10^4$ K 程度であることが実験的に求められている。w/k_B の値がおよそこの程度である非磁性金属について，以下の①と②が成り立つことを考慮して，w/k_B を実験的に求める方法について説明しなさい。

① 数百～10^3 K 程度まで加熱した状態の非磁性金属を水に入れて急冷すると，加熱した温度における原子配置の乱れが低温でもしばらく固定されている。

② 不純物量が少ない非磁性金属の場合，液体ヘリウムの沸点である 4.2 K での電気抵抗 R は原子配置の乱れによる伝導電子の散乱のみに起因し，$R \propto n$ と考えてよい。



III

電磁場について，以下の問 1~4 に答えなさい。ただし，真空における透磁率を μ_0 とする。

問 1 静磁場を考える。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}=(A_x,\,A_y,\,A_z)$ を用いて，磁束密度 $\boldsymbol{B}=(B_x,\,B_y,\,B_z)$ の各成分を示しなさい。

問 2 時間変化しない電磁場を考える。クーロンゲージ $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ をとるとき，

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$$

となることを示しなさい。ただし電流密度を $\boldsymbol{J}$ とする。

問 3 ベクトルポテンシャルが，半径 $r=\sqrt{x^2+y^2}=a$ を境に

$$\boldsymbol{A}_{\rm in}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\mu_0 I y}{2}\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I x}{2}\\[2ex] 0\end{pmatrix}\qquad (r<a),\qquad\qquad \boldsymbol{A}_{\rm out}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\mu_0 a^2 I y}{2r^2}\\[2ex] \dfrac{\mu_0 a^2 I x}{2r^2}\\[2ex] 0\end{pmatrix}\qquad (r>a)$$

と表すことができるとき，$r<a$ および $r>a$ の場合それぞれについて，磁束密度の大きさを求めなさい。 ただし，$x,\,y$ は空間座標であり，I は電流の大きさである。

問 4 問 3 のベクトルポテンシャルが $r\neq a$ でラプラス方程式を満たすことを示しなさい。