

2025年8月19日

物理 I 試験問題

(120 分)

[注意事項]

1. 問題は I～III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。
2. 解答は問題ごとに別の解答用紙(計 3 枚)に記入すること。
3. 各解答用紙に受験番号と氏名, 問題番号を記入すること。
4. 試験開始後は退室できません。

I

質点の運動を特徴づけるラグランジアン L について慣性基準系で考える。時刻を t として、一般座標を $q(t)$ 、一般速度を $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ 、運動エネルギーを T 、ポテンシャルを V と表記する。以下の問1~4に答えなさい。

問1 ラグランジアン L は何を変数として持つ関数か答えなさい。

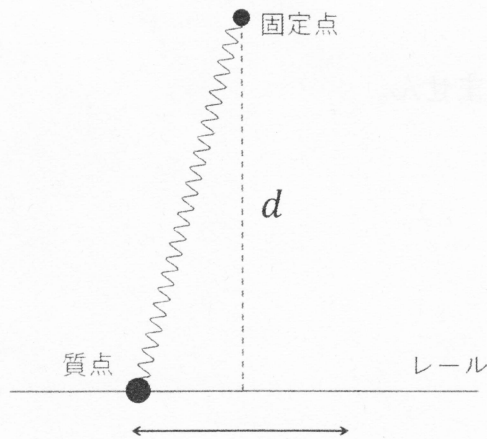
問2 質点が、時刻 $t = t_1$ および $t = t_2$ に、それぞれ $q = q_1$ および $q = q_2$ の位置にいたとする。これらの位置の間で作用積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

を考えると、質点は $q(t)$ の微小な変化に対して、 S が停留値(可能な極小の値)をとるように運動する。この L に対する最小作用の原理を用いて、運動を記述する微分方程式を導出しなさい。

問3 L が時刻 t をあらわに含まない場合、時間的に変化しない保存量が存在することを示しなさい。

次に、下図のように水平面上に固定されている直線レールに沿ってなめらかに運動できる質量 m の質点を考える。



問4 レールから距離 d の位置にある固定点と質点の間をばね(ばね定数 k 、自然長 $d_0, d_0 < d$)でつないだ。レール方向の位置を x とし、ばねの長さが d の位置を $x = 0$ とする。質点の運動方程式を求めなさい。また、微小($x \ll d$)な振動をさせた場合の角振動数を求めなさい。

II

図のように、半径 a および b ($a < b$) である2つの円筒導体を同軸に配置し、それらの間に誘電体を満たしたコンデンサーがある。このコンデンサーは十分に長く、端の効果と円筒の厚さは無視できる。内側の円筒に単位長さあたり Q ($Q > 0$) の電荷があり、外側の円筒は接地してある。以下の問1~5に答えなさい。ただし、真空の誘電率は ϵ_0 とする。

問1 誘電体の比誘電率が ϵ_r である。中心軸からの距離 r ($a < r < b$) における電場の強さ $E(r)$ を表しなさい。

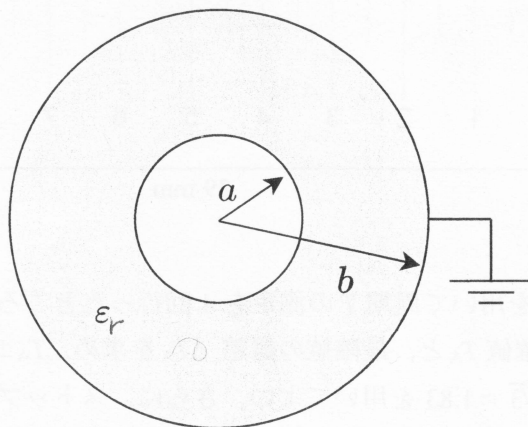
問2 問1のときの内側の円筒の電位を求め、距離 r ($0 < r < b$) の関数として図示しなさい。またこのコンデンサーの単位長さあたりの静電容量を求めなさい。

次に、 $r = c$ ($a < c < b$) で誘電体の比誘電率が変化する場合を考える。 $a < r < c$ までの比誘電率が $2\epsilon_r$ 、 $c < r < b$ の比誘電率が ϵ_r であるとする。

問3 誘電体中の電場を求め、距離 r ($a < r < b$) の関数として図示しなさい。

問4 コンデンサーの単位長さあたりの静電容量を求めなさい。

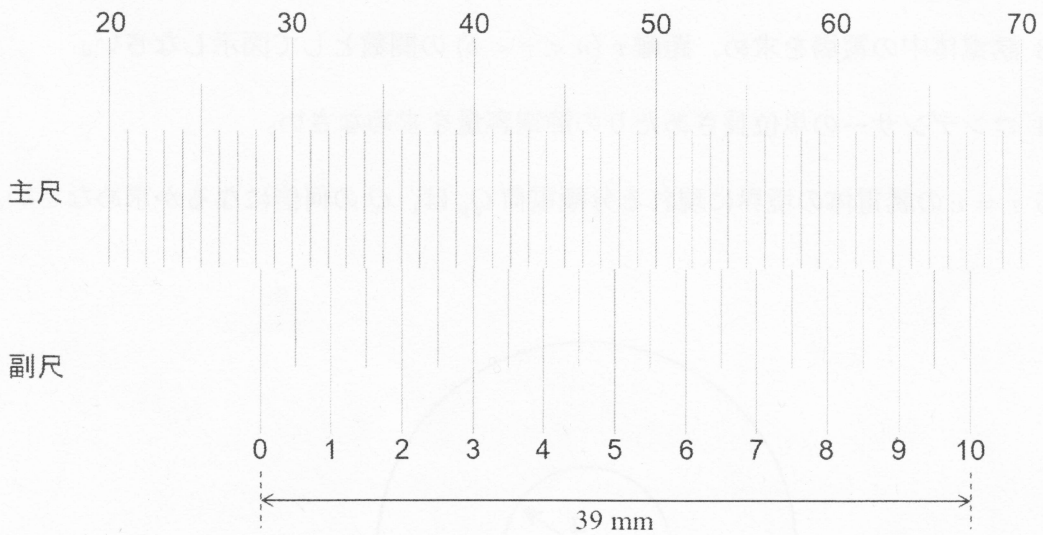
問5 $r = c$ の誘電体の境界に現れる分極電荷 Q_p は、 Q の何倍になるか求めなさい。



III

質量 m で半径 R の球形のおもりを、質量が無視できる長さ h の針金で吊るした振り子を考える。 $R \ll h$ であれば、この振り子を長さ $L = h + R$ の単振り子とみなすことができ、その微小振動の周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ を測定することで、重力加速度 g を求めることができる。以下の問 1～5 に答えなさい。

問 1 一般的に用いられているノギスでは、副尺の 0 から 10 目盛までの長さが 39 mm であり、その間が 20 等分されている。このようなノギスを用いておもりの直径 $2R$ を測定したところ、主尺と副尺の目盛が図のようになった。この図では、主尺目盛が 38 mm のところに副尺目盛の 2.5 が一致している。おもりの直径を求めなさい。



問 2 ストップウォッチを用いて周期 T の測定を 4 回行ったところ、表 1 に示す結果が得られた。 T の最確値 T_A と、最確値の誤差 ΔT_A を求め、 $T_A \pm \Delta T_A$ の形で表しなさい。必要なら $\sqrt{10/3} \approx 1.83$ を用いてよい。さらに、ストップウォッチを用いてより精度良く T を測定するためにはどのような工夫を行えば良いかについて、理由と共に答えなさい。

表 1

T (s)	2.06	2.14	2.08	2.12
---------	------	------	------	------

問3 $T_A \pm \Delta T_A$ と、誤差付きの振り子の長さ $L \pm \Delta L$ を用いて、 g の誤差 Δg が、

$$\Delta g = g \sqrt{4 \left(\frac{\Delta T_A}{T_A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2} \text{ と与えられることを示しなさい。}$$

問4 この実験を4人で独立に行った結果、 $g \pm \Delta g$ が表2に示すように得られた。誤差の重みを考慮した加重平均 g' と、その誤差 $\Delta g'$ を求め、 $g' \pm \Delta g'$ の形で表しなさい。必要なら $\sqrt{10} \approx 3.16$ を用いてよい。

表2

$g \pm \Delta g$ (m/s ²)	9.81 ± 0.03	9.80 ± 0.06	9.82 ± 0.03	9.76 ± 0.06
--------------------------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

問5 $R \ll h$ とみなせない場合、振り子の微小振動の周期は $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \left\{ 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \right\}}$

となる。この式を導出しなさい。