

2024年8月20日

物理 II 試験問題 (120分)

[注意事項]

- 1) 問題は I ~ III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。
- 2) 解答は問題毎に別の解答用紙 (計 3 枚) に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名, 問題番号を記入すること。
- 3) 試験開始後は退室できません。

I

質量 m の粒子がポテンシャル

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{8a^2}(x-a)^2(x+a)^2,$$

の下で x 方向に運動している。ただし a および ω は正の実数とし、 $a \gg \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ (\hbar は換算プランク定数) を満たすとする。以下、必要があれば公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

を用いなさい。

問1 波動関数 $\psi(x)$ に対する時間に依存しないシュレディンガー方程式を書き下しなさい。

問2 $x = \pm a$ の近傍で、ポテンシャルはそれぞれ

$$V(x) \simeq \begin{cases} V_+(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & (x \simeq +a), \\ V_-(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x+a)^2 & (x \simeq -a), \end{cases}$$

と近似できる。 $V_+(x), V_-(x)$ をポテンシャルに持つシュレディンガー方程式の基底状態の波動関数 $\psi_+(x), \psi_-(x)$ 、およびエネルギー固有値 E_+, E_- をそれぞれ求めなさい。ただし、 $\psi_+(x) = Ae^{-B(x-a)^2}, \psi_-(x) = Ae^{-B(x+a)^2}$ (A, B は正の実数) の形を仮定してよい。波動関数は規格化すること。

元のポテンシャル $V(x)$ の下で運動する粒子の基底状態および第1励起状態のエネルギー差を $\psi_+(x), \psi_-(x)$ で書き下したい。

問3 一般に偶関数のポテンシャル $V(x) = V(-x)$ に対して、エネルギー固有状態の波動関数は偶関数または奇関数であることが知られている。 $\psi_+(x), \psi_-(x)$ の線型結合のうち、偶関数であるもの $\psi_0(x)$ および奇関数であるもの $\psi_1(x)$ を構成しなさい。波動関数は規格化し、その際 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_+(x)\psi_-(x) dx \ll 1$ であることを用いてよい。

問4 波動関数 $\psi_0(x)$ および $\psi_1(x)$ の下でのハミルトニアン H の期待値をそれぞれ E_0 および E_1 とする。 $E_0 - E_1$ を $\psi_+(x), \psi_-(x)$ およびポテンシャル $V(x)$ を含む積分の形で書き下しなさい。

II

図1のように x 方向に分子が N 個連なった鎖状分子を考える。個々の分子は図2のように状態 A もしくは状態 B のいずれかを取るとし、状態 A, B それぞれについて分子の x 方向の長さは a, b である。また、系のエネルギーは分子の向きには依存しないものとする。この系を温度 T に保つとき、以下の問いに答えなさい。

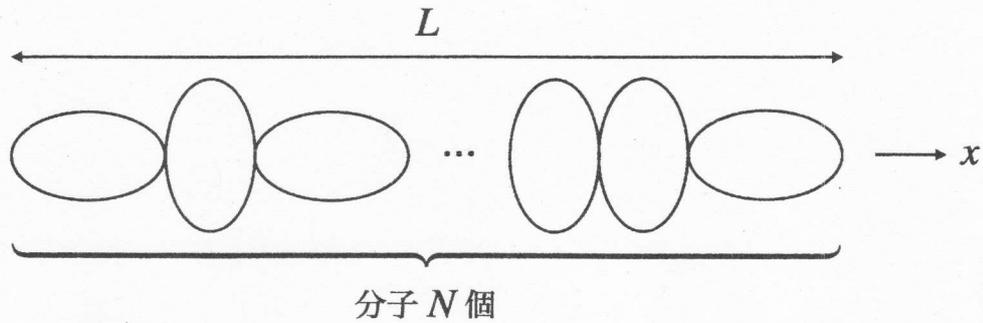


図1

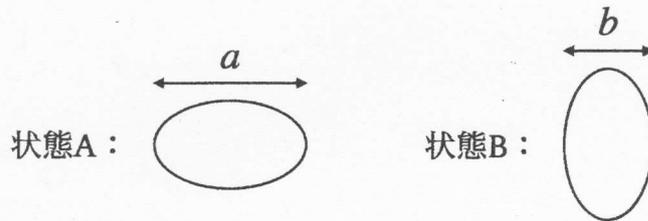


図2

- 問1 状態 A を取る分子の数を N_a として、鎖状分子の長さ L を N, N_a, a, b を用いて表しなさい。
- 問2 問1の結果より、 $\frac{N_a}{N}$ を $\frac{L}{N}, a, b$ を用いて表しなさい。
- 問3 L の値を固定したとき、取り得る場合の数 W を N, N_a を用いて表しなさい。
- 問4 ボルツマン定数を k_B として、この系の1分子あたりのエントロピー $\frac{S}{N}$ を $\frac{L}{N}, a, b$ を用いて表しなさい。適宜スターリングの公式 $\log(x!) \simeq x \log x - x$ を用いること。
- 問5 この鎖状分子の張力が0となる長さ L_0 を求めなさい。

III

マイクロ波は実生活への応用や宇宙研究、先端技術まで幅広く使用されている、電磁波の一種である。そのマイクロ波について以下の問に答えなさい。

問1 電子レンジでは水分子を加熱するために、2.45 GHz のマイクロ波が使用されている。このマイクロ波の波長を求めなさい。

問2 電子レンジで使用しているマイクロ波が外部に漏れてこない理由を、金属壁面および窓面について、それぞれ電磁気学の考え方にもとづいて定性的に説明しなさい。

問3 宇宙誕生から約 38 万年後に発せられた電磁波が、現在約 60 GHz のマイクロ波として検出されている（宇宙背景マイクロ波）。宇宙の膨張によって波長が約 1000 倍に伸びたと考えると、放射時の宇宙の温度は約何 K に相当すると考えられるか見積りなさい。ここで、ボルツマン定数 $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s とする。

問4 宇宙背景マイクロ波のスペクトルは黒体輻射モデルで表される。黒体輻射のスペクトル $f(T, \nu)$ が

$$f(T, \nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

として表されるとき、低周波数側および高周波数側での近似式を示し、スペクトルの概形を描きなさい。ここで、 T は黒体の温度、 ν はマイクロ波の周波数である。

問5 マイクロ波は給電への応用も実証が進められている。2022 年には空間伝送型とよばれる 20 m 程度までの距離の給電が可能な方式で、有人環境で 1 W の給電が解禁された。1 W の給電によって可能な応用はどのようなものがあるか検討しなさい。

問6 電磁波について、ポインティングベクトル S が

$$S \equiv E \times H$$

として定義される。ここで、 E と H はそれぞれ電場と磁場である。

S/c はエネルギーに関連した物理量となる。 E と H を SI 単位系で表わし、次元解析を行うことで S/c の物理的な意味を説明しなさい。