

2024年8月20日

物理 I 試験問題 (120分)

[注意事項]

- 1) 問題は I ～ III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。
- 2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
配布されたグラフ用紙には、問題 III の指示に従い解答を記入すること。
- 3) 各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。
- 4) グラフ用紙の表紙に受験番号と氏名を記入すること。また，綴じてあるグラフ用紙は切り離さないこと。
- 5) 試験開始後は退室できません。

I

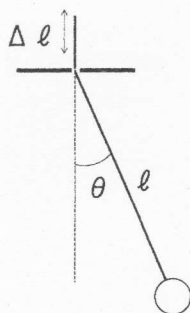
長さ l 、質量 m の単振り子の運動について以下の問に答えなさい。ただし、重力加速度を g とすること。

問1 振り子に微小な角度 θ_0 だけ変位を与えて時刻 $t=0$ に静かに運動を開始した。振れ角 θ についての微分方程式を立て、 θ を t の関数として表しなさい。

問2 この運動について、運動エネルギー $E_k(\theta)$ と位置エネルギー $E_p(\theta)$ の一周分の変化を θ の関数としてグラフに表わしなさい。ただし、 $E_p(0)=0$ とすること。

問3 振り子の張力 T を θ の関数として表しなさい。

ここで、図のような機構によって運動中に振り子の長さを l と $l+\Delta l$ の間で変化させることを考える。ただし $l \gg \Delta l > 0$ とする。



問4 問1の運動について、 $\theta = -\theta_0$ となった時に振り子の長さを l から $l+\Delta l$ に変化させ、その後 $\theta = 0$ となった時に振り子の長さを l に戻した。おもりが糸からされた仕事の和を $E_p(-\theta_0)$ を用いて表しなさい。

問5 問4の操作の後に θ の極値で振り子の長さを $l+\Delta l$ に変化させ、 $\theta = 0$ で l に戻すことを繰り返すとこの振り子の周期と振幅はどうなるか、定性的に説明しなさい。

II

等間隔に2本の平行な導線が固定されている。そこに等しい大きさの逆向きの電流を流すことにより信号を伝送することができ、レッヘル線、または平行フィーダーと呼ばれる。導線は真空中に置かれ、被覆はついていないものとして、以下の間に答えなさい。

問1 まず、半径 a の円の断面を持つ無限に長い1本の直線状の導線だけを考え、そこに線密度 $\lambda (> 0)$ の電荷が分布しているとする。導線の中心軸からの距離が $r (> a)$ の位置における電位を求めなさい。電位の基準は $r = r_0 (> a)$ にとること。

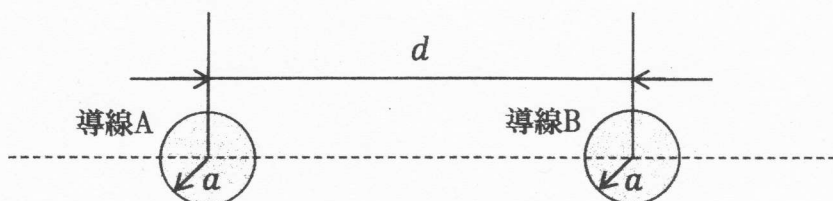
問2 次に、問1のような導線が2本平行に置かれている状態を考える。下図のようにその一方を導線A、他方を導線Bとし、導線Aには線密度 λ 、導線Bには $-\lambda$ の電荷が帯電しているとする。2本の平行線の間隔を d 、導線の半径を a としたときの、導線Bの表面に対する導線Aの表面の電位を求めなさい。ここで、導線の間隔は半径より十分大きく、導線の表面の電荷密度は一定であると仮定してよい。

また、この2導線間の導線方向に沿って単位長さ当たりの電気容量 C を求めなさい。

問3 各導線に逆向きに電流 I が流れているとする。この2導線間を横切る磁束の大きさを、導線方向の単位長さ当たりの量で求めなさい。また、この2導線の導線方向の単位長さ当たりのインダクタンス L を求めなさい。その際、導線内を貫く磁束の大きさは小さいとして無視してよい。

問4 この2導線系がつくる伝送線のインピーダンスは、導線の抵抗が無視できる場合、 $\sqrt{L/C}$ で与えられる。これを、問2、問3の結果を用いて計算しなさい。

問5 この伝送線が $d = (e^2 + 1)a$ (e は自然対数の底) を満たすとき、インピーダンスの値を問4の結果を用いて有効数字2桁で求めなさい。必要であれば、真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 としたとき、光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ であること、真空の透磁率はSI単位系で $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ であらわされることを用いなさい。



III

半無限空間 ($x \geq 0$) を占める一様な温度 T_i の物体がある。時刻 $t = 0$ において、この物体の表面 ($x = 0$) を温度 $T_0 (> T_i)$ の熱浴に接触させる場合を考える。この時、物体の内部の温度は誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta$$

を用いて

$$T(x, t) = T_0 + (T_i - T_0) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (1)$$

と書けることが知られている。ここで α は熱拡散率と呼ばれる量である。以下の問に答えなさい。必要があれば、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi/c}$ という関係式を用いてもよい。

問1 熱拡散率 α の次元を答えなさい。

問2 $\operatorname{erf}(0)$, $\operatorname{erf}(\infty)$ の値を求めなさい。また、 $\operatorname{erf}(x)$ の概形を $(-\infty, \infty)$ の区間で描きなさい。

問3 式(1)が以下の熱伝導方程式

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

を満たすことを示しなさい。

問4 ある時刻 $t_0 (> 0)$ における物体内部の温度分布を図示し、時刻 $2t_0$, $3t_0$, $4t_0$ では物体内部の温度分布がどのように時間発展していくか図示しなさい。変化の様子が定量的にわかるよう、必要に応じて図中に値を記入しなさい。

問5 熱拡散率 α は物質の熱伝導率に比例することが知られている。ステンレス、銅、プラスチックという3つの物質について熱伝導率が大い順にならべなさい。また、そのように考えた理由を述べなさい。

問6 サーミスタとよばれる抵抗温度計の一種が温度測定にはしばしば用いられる。サーミスタの抵抗の温度依存性は以下の式によって与えられることが知られている。

$$R(T) = R_0 \exp \left(B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_a} \right) \right)$$

ここで R_0 , B , T_a は温度計を特徴づける定数である。あるサーミスタの抵抗値 R (Ω) と温度 T (K) の関係を表1に示す。この表のデータを配布したグラフ用紙のうち適当なものにプロットし、直線の傾きから定数 B を有効数字2桁で求めなさい。ただし、 $\log_{10}2=0.301$, $\log_{10}3=0.477$, $\log_{10}e=0.434$ を用いてよい。

表1

$R(\Omega)$	$T(K)$
50000	240
20000	270
10000	300
4000	350
2000	400