2016 年 8 月 23 日

物理 II 試験問題

(150分)

[注意事項]

1) 問題は I 〜 III の 3 問あります。3問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名、問題番号を記入すること。

3) 試験開始後 30 分を経過したあとの入室はできません。

I

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$$

で記述される 1 次元量子系がある。ここで，m は質点の質量，x は位置，p は運動量，$V(x)$ はポテンシャルエネルギーである。ただし $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ で，h はプランク定数として以下の問に答えなさい。

問 1　波動関数を $\psi(x,t)$ として，この系の時間 t に依存するシュレディンガー方程式を書きなさい。また，波動関数の物理的解釈を述べなさい。

問 2　$V(x)$ が時間に陽に依存していないので，変数分離

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(x)$$

が可能である。$\varphi(x)$ に対する方程式を導きなさい。このとき E が，どのような物理的な意味を持つか答えなさい。

問 3　1 次元の束縛状態には縮退が無いことが知られている。このことを用いて，ポテンシャルエネルギーが偶関数 $V(x) = V(-x)$ のとき，エネルギー固有状態の波動関数は偶関数か奇関数となることを示しなさい。

問 4　$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ のとき，基底状態，第一励起状態，第二励起状態の波動関数の概形を書きなさい。ただし，k はバネ定数である。

問 5　$V(x) = \frac{1}{4}\lambda x^4$ の場合に，第一励起状態のエネルギー固有値の近似値を変分法を使って求めたい。ここで λ は定数である。試行関数として相応しいものを自分で考えて，それを用いて第一励起状態のエネルギー固有値の近似値を求めなさい。必要であれば，次の積分公式を使いなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2}dx = \frac{15}{8a^3}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

II

1原子あたり1個の不対電子を持つ原子 N 個の系を考える。ここで，N 個の原子間に相互作用はなく，互いに独立とする。量子力学的に電子のスピンは，外部から印加した磁束密度 B に対して平行か反平行の２つの状態しかとれない。したがって，電子の磁気モーメントを μ $(\mu > 0)$ とすると，磁束密度 B 中の電子がとりうるエネルギー準位は $+\mu B$ と $-\mu B$ の２準位となる。以下の問に答えなさい。なお，ボルツマン定数は $k_{\mathrm{B}} = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1}$ とし，解答用紙には計算の導出過程も示しなさい。

問１　有限の磁束密度 B が印加されていて，系の温度が絶対零度の時，系のエネルギーはどうなると予想されるか。その理由とともに答えなさい。

問２　有限の磁束密度 B が印加されていて，系の温度が T の時，２つの準位の分布数の比はどうなるか答えなさい。次に，電子の磁気モーメント μ は，ボーア磁子である。ボーア磁子の値と単位を答えなさい。また，これを用いて磁束密度 $B = 10.0$ T，温度が $T = 6.72$ K の場合の２つの準位の分布数の比を有効数字２桁で答えなさい。必要であれば $e = 2.72$ を用いなさい。

問３　磁束密度 B および温度 T のもとでこの系の分配関数を求め，それを使ってこの系の自由エネルギーを求めなさい。

問４　問３の自由エネルギーから，この系のエントロピーを求めなさい。また，T を絶対零度に近づけていった時，熱力学の第３法則が成り立つことを示しなさい。この結果と問１の結果との関係を議論しなさい。

問５　有限温度で磁束密度 B が印加されていない場合，電子の２つのエネルギー準位は縮退する。このとき系全体がとりうる状態の場合の数を元に，この系のエントロピーを求めなさい。また，この結果は問４で求めたエントロピーのどのような極限に相当するか説明しなさい。

III

実験室系で静止した電子と光子との散乱を考える。以下，光速を c，プランク定数を h とする。

問 1　光子は散乱角度 ϕ で散乱，電子は入射光子の運動方向に対して θ の角度で運動を始めた。この関係を図示しなさい。

問 2　入射光子の振動数を ν，散乱後の光子の振動数を ν'，散乱後の電子の運動エネルギーを K とした時に，エネルギーの保存の式を書きなさい。

問 3　散乱後の電子の運動量を p とした時に，運動量の保存の式を入射光子の運動方向及びそれに垂直な方向について書きなさい。

問 4　散乱後の電子は速さ v で運動した。相対論的な K および p を書きなさい。電子の静止質量を m_0 とする。

問 5　$\dfrac{1}{h\nu'} - \dfrac{1}{h\nu} = \dfrac{1}{m_0 c^2}(1-\cos\phi)$ を導きなさい。

問 6　散乱によって光子の失うエネルギーを c, h, ν, m_0, ϕ を用いて表しなさい。これが最大になるときの ϕ の値を示し，その時の散乱の様子を図示しなさい。