

物理 I 試験問題

(150 分)

[注意事項]

- 1) 問題は I ～ IV の 4 問あります。4 問すべてに解答すること。
- 2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 4 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名、問題番号を記入すること。
なお、グラフ用紙（1 枚）の余白部分にも受験番号と氏名を記入すること。
- 3) 試験開始後 30 分を経過したあとの入室はできません。

I

仮に、磁荷 g (> 0) の磁気単極子があるとすると、その周りには

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^3} \mathbf{r}$$

の磁束密度ができる。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ であり、 $\mathbf{r}$ は磁気単極子を原点とする位置ベクトルを表す。この磁気単極子がつくる磁束密度のもとで運動する質量 m 、電荷 e (> 0) の荷電粒子を考える。以下の問に答えなさい。

問 1 荷電粒子に対する運動方程式を書きなさい。

問 2 荷電粒子になされる仕事を考えて、荷電粒子の運動エネルギーが保存していることを示しなさい。

問 3 この系では角運動量 $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ は保存していない。そのかわりに、

$$\mathbf{M}_0 \equiv \mathbf{M} - \frac{eg}{4\pi r} \mathbf{r}$$

で定義される量が保存する事を示しなさい。また、 $|\mathbf{M}_0|$ の最小値を求めなさい。

問 4 θ を $\mathbf{r}$ と $\mathbf{M}_0$ のなす角とすると、 θ が時間に依存しないことを示しなさい。また、荷電粒子の運動がどのような面に拘束されているかを答えなさい。

問 5 荷電粒子が原点方向に初速度を持っていた場合、その後の運動はどうなるか答えなさい。

問 6 初速度の方向が原点の方向から少しずれていた場合、その後、粒子は回転しながら原点に向かうが、原点に達することなく、やがて跳ね返る。このときの回転の向きを答えなさい。また、原点に決して到達しない理由を説明しなさい。

II

2枚の半径 a の円形電極板が、平行に間隔 d で隔てられているコンデンサーを考える。また、真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とする。以下の問に答えなさい。

問 1 1つの電極板に電荷 $+Q$ 、もう1つの電極板に電荷 $-Q$ が蓄えられたとき、電極板間の電場をガウスの法則を用いて求めなさい。ただし、電極板は十分大きく極板の縁の効果は無視できるものとする。

問 2 このコンデンサーの静電容量を求めなさい。

問 3 コンデンサーとスイッチを含む回路を作り、コンデンサーに電荷 $\pm Q$ を蓄えたのち、スイッチを閉じて放電した。このとき極板間に生じる変位電流により磁場が生じる。変位電流を含んだアンペールの法則を書きなさい。それを用いて、円形電極板の中心軸から r の位置 ($r < a$) における磁束密度の大きさ $B(r, t)$ を求めなさい。ただし、時刻 t における極板の電荷を $Q(t)$ とし、回路の導線に流れる電流が作る磁場は無視できるものとする。

問 4 ポインティングベクトルの定義を書きなさい。また、問3のとき、中心軸から r 離れた点で、放射状に大きさ

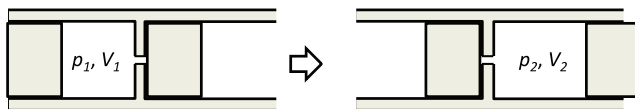
$$S(r, t) = \frac{r}{4\pi^2 \epsilon_0 a^4} \frac{d\{Q(t)\}^2}{dt}$$

のポインティングベクトルが生じることを示しなさい。

問 5 放電が終わるまでにコンデンサー極板間の側面から外に流れ出る電磁場の全エネルギーを求め、それが最初にコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーに一致することを示しなさい。

III

図のような装置を使って気体を小さな穴から吹き出させる過程を考える。左の部屋は常に圧力 p_1 に、右の部屋は常に圧力 $p_2 (< p_1)$ に保たれている。初め、左の部屋にあった体積 V_1 の気体はすべて右の部屋に移動し体積が V_2 となった。この装置は断熱状態にあり、小さな穴の体積は無視できるとする。以下の問に答えなさい。



問 1 エンタルピー H は $H = U + pV$ で表わされる。 U , p , V はそれぞれ気体の内部エネルギー、圧力、体積である。上記の過程が等エンタルピー過程である事を示しなさい。

問 2 エンタルピーの微小量が $dH = TdS + Vdp$ で表わされる事を示しなさい。ただし、 T は温度、 S はエントロピーである。

問 3 S の変数を T と p の 2 つに選んだ時、微小量 dS を以下に示す体積弾性率 α 、定圧比熱 C_p を用いて表わしなさい。

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

また、次のマクスウェルの関係を用いて良い。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

問 4 問 2, 3 の結果から $\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$ を α , C_p を用いて表わし、上記の過程において理想気体では温度が変化しない事を示しなさい。

問 5 この気体 n モルが気体分子間の相互作用を考慮した状態方程式

$$pV = nRT \{1 + B(T)p\}$$

に従うとした時、上記の過程において気体の温度が下がる条件を求めなさい。ただし、 R は気体定数で、 $B(T)$ は定数 a, b ($a > 0, b > 0$) を用いて次のように表わされる。

$$B(T) = \frac{1}{RT} \left(b - \frac{a}{RT} \right)$$

IV

確率的に起きる事象に関して以下の問に答えなさい。

問 1 低い確率で起きる事象を多数回試行すると、確率事象の分布は

$$P(x, \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

で表されるポアソン分布となる。ここで μ は事象の起る回数の期待値、 x は事象の起る回数である。ポアソン分布の期待値 E が μ となることを示しなさい。必要であれば $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu}$ の関係を用いてよい。

問 2 ポアソン分布の分散 σ^2 が μ となることを示しなさい。ここで分散 σ^2 に関して、 $\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(x, \mu) - E^2$ の関係を用いてよい。

問 3 $\mu = 1.0$ の場合について、横軸を x 、縦軸を $P(x, \mu)$ としたグラフを $x = 0$ から $x = 5$ の範囲で解答用紙に書きなさい。必要であれば $e = 2.7$ を用いなさい。また、図中に E および σ を示しなさい。

問 4 ポアソン分布の期待値を大きくしてゆくと、確率事象の分布は正規分布

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

に近い形となる。正規分布では、半値全幅 ($FWHM$) が 2.35σ となることを示しなさい。半値全幅とはピークの半分の高さでの分布の幅である。必要であれば $\ln 2 = 0.693$ を用いなさい。

問 5 正規分布に従うことがわかっている物理量を測定したところ、表 1 の様な結果を得た。配布したグラフ用紙にヒストグラムを書きなさい。そのグラフから $FWHM$ を読み取り σ を見積りなさい。

物理量	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0
観測回数	15	28	65	143	255	363	359	261	138	54	12

表 1: 測定結果