2023 年 8 月 22 日

物理II 試験問題
(120 分)

[注意事項]

1) 問題は I 〜 III の 3 問あります。3問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

1次元ポテンシャル$V(x)$の中を運動する質量m、エネルギーEの粒子の振舞いを考える。

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x \leq 0) \\ \lambda \hbar^2 \delta(x-a) & (x > 0) \end{cases}$$

デルタ関数型ポテンシャルは、λの符号によって斥力と引力の場合があり、$a > 0$とする。以下の問1〜5に答えなさい。必要な物理量があれば各自で定義して用いてもよい。

問1 時間に依存するSchrödinger方程式を記しなさい。

問2 $x = a$における波動関数の導関数の接続条件が以下のようになることを示しなさい。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{d\psi}{dx}(a+\varepsilon) - \frac{d\psi}{dx}(a-\varepsilon) \right] = 2m\lambda\psi(a)$$

まず斥力（$\lambda > 0$）の場合を考える。ここで、領域I ($0 < x < a$)、領域II ($a < x$) の2つに分ける。波動関数$\psi(x,t)$は領域Iでは$+x$方向及び$-x$方向に進む波の重ね合わせ

$$\psi_{\mathrm{I}}(x,t) = A \exp[i(kx - \omega t)] + B \exp[i(-kx - \omega t)]$$

領域IIでは$+x$方向に進む波

$$\psi_{\mathrm{II}}(x,t) = C \exp[i(kx - \omega t)]$$

とする。ここでkは波数、ωは角振動数を表す。

問3 領域Iと領域IIにおける波動関数の振幅の比C/Aを、波数kの関数として求めなさい。ポテンシャルを透過する割合$|C/A|^2$について、粒子のエネルギーが高い極限 ($E \to +\infty$) と低い極限 ($E \to 0$) で、どのような現象が起こるか物理的に説明しなさい。

問4 波数kが$ka = n\pi$ (nは自然数) を満たす時、どのような現象が起こるか説明しなさい。

次にデルタ関数型ポテンシャルが引力の場合、$\lambda < 0,\ |\lambda| \gg 1/(ma)$を考える。

問5 束縛状態のエネルギー ($E < 0$) を求めなさい。

II

電子のスピンは静磁場 H の中で、磁気モーメントを μ_B として2つのエネルギー準位 $-\mu_B H$ と $+\mu_B H$ に分かれる。絶縁体中の原子が不対電子を各々1つずつ持っている系を考える。今、この電子は原子に束縛されているので運動の自由度はなく、お互いに独立なスピン $\frac{1}{2}$ の自由度を持つ N 個の系とみなして考える。以下の問 1 ～ 5 に答えなさい。ただし、k_B をボルツマン定数とし、必要な物理量があれば各自で定義して用いてもよい。

問 1 有限温度 T での N 個のスピン系の分配関数 Z を求めなさい。さらに、ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めなさい。

問 2 全体の磁気モーメント M を求めなさい。さらに、$\dfrac{\mu_B H}{k_B T} = 2$ のとき、この系は1つのスピン当たり μ_B の何倍の磁気モーメントを持つか、$e^2 \sim 7.4$ として有効数字2桁で求めなさい。

問 3 外部磁場 H が小さい極限での磁化率 $\chi(T) = \left(\dfrac{\partial M}{\partial H}\right)_{H\to 0}$ を求め、温度 T の関数として磁化率 χ の概略を図示しなさい。

問 4 この系のエントロピー S を H と T の関数として求めなさい。

問 5 この系を温度 T_1、外部磁場 H_1 のもとで平衡状態に置いたのち、断熱状態で準静的に磁場を H_1 から H_2 までゆっくりと変化させる。このとき温度はどのようになるか説明しなさい。ただし、$H_1 > H_2$ とする。

III

以下の問1～4に答えなさい。必要な物理量があれば各自で定義して用いてもよい。

一定で一様な磁場 $\vec{B}$ における真空中の荷電粒子 (質量 m、電荷 $q > 0$) の運動について考える。磁場方向を z 軸にとり磁束密度の大きさを $B_0 > 0$ とする。荷電粒子は、時刻 $t = 0$ で原点を y 軸方向に速さ $V_0 \ll c$ で通過した。

問1 時刻 $t \geq 0$ での荷電粒子の位置を求めなさい。またどのような軌跡になるか答えなさい。

上記の磁場 $\vec{B}$ だけでなく、一定で一様な電場 $\vec{E}$ も存在する場合を考えよう。電場の方向を y 軸にとり、電場の大きさを $E_0 > 0$ とする。荷電粒子の運動を求めるために、以下のように考えていこう。

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて、電磁場は4元反変ベクトル $A^\mu \equiv (\phi/c, \vec{A})$ で表すことができる。4元反変ベクトル A^μ からつくられる電磁場テンソル

$$F^{\mu\nu} \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} \left\{ g^{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} A^\nu - g^{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} A^\mu \right\}$$

を考える。ここで座標反変ベクトルは $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$、$g^{\mu\lambda}$ はテンソル ($g^{00} = 1$、$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$、他0) である。

問2 電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ の成分を、E_0 と B_0 を用いて記しなさい。

問3 静止系から見て x 軸方向に一定速度 $v = E_0/B_0$ で移動している系Kを考える。電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ のローレンツ変換を用いて、系Kにおける電磁場テンソル $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を求め、系Kにおいて電場が存在しないことを示しなさい。また、系Kにおける磁場を求めなさい。

問4 荷電粒子は、時刻 $t = 0$ で y 軸方向に速さ $V_0 \gg E_0/B_0$ ($V_0 \ll c$) で運動しているとする。荷電粒子はどのような運動をするか、概略を説明しなさい。