2022年8月23日

物理 II 試験問題
（120分）

【 注意事項 】

1) 問題はI～IIIの３問あります。３問すべてに解答すること。

2) 解答は問題ごとに別の解答用紙（計３枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

3 つの量子状態 $|1\rangle$，$|2\rangle$，$|3\rangle$ が規格直交関係 $\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = \langle 3|3\rangle = 1$ および $\langle 1|2\rangle = \langle 2|3\rangle = \langle 1|3\rangle = 0$ を満たしている。ある定数 $\varepsilon\ (>0)$ によりハミルトニアンが

$$\hat{H} = -\varepsilon\Big(|3\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3|\Big)$$

で与えられる系について，以下の問 1 ～ 4 に答えなさい。

問 1　状態 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle - |3\rangle\Big)$ のエネルギー期待値を求めなさい。

問 2　定数 a と b により $a|1\rangle + b|2\rangle + a|3\rangle$ と表される状態が $\hat{H}$ の固有状態である場合に，$\dfrac{b}{a}$ の値と固有エネルギーを求めなさい。

問 3　状態 $|1\rangle$ を $\hat{H}$ の固有状態の重ね合わせで表しなさい。

問 4　時刻 $t\ (\geq 0)$ の状態を $|\Psi(t)\rangle$ で表す。$|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$ である場合に，$|\Psi(t)\rangle = -|3\rangle$ となる t の最小値を，定数 $\hbar$ を使って表しなさい。

II

2つの異なる原子が結合した2原子分子の回転運動を考える。重心を通り，2つの原子の中心を結ぶ直線に垂直な軸のまわりの慣性モーメントをIとする。プランク定数を$h = 6.6 \times 10^{-34}\ \mathrm{m^2\ kg\ s^{-1}}$，ボルツマン定数を$k_{\mathrm{B}} = 1.4 \times 10^{-23}\ \mathrm{m^2\ kg\ s^{-2}\ K^{-1}}$として，温度$T$の熱平衡状態に関する以下の問1〜4に答えなさい。

問1 2原子分子の回転運動を量子力学的に考えると，エネルギー固有値は

$$\varepsilon_{\mathrm{rot}} = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I}$$

で与えられる。ここでℓは全角運動量を表す。縮重度が$2\ell+1$であることに注意して，分子の回転運動にかかわる分配関数Z_{rot}を与える式を書きなさい。

問2 回転運動の特性温度$\Theta_{\mathrm{rot}} = \hbar^2/Ik_{\mathrm{B}}$に対し，$T \gg \Theta_{\mathrm{rot}}$の高温極限における分子の回転運動に伴う比熱$c_{\mathrm{rot}}$を求めなさい。

問3 $T \ll \Theta_{\mathrm{rot}}$の低温極限における分子の回転運動に伴う比熱$c_{\mathrm{rot}}$を求めなさい。また，$T \to 0$の時，$c_{\mathrm{rot}}$の値を求めなさい。

問4 塩化水素（HCl）の場合を考える。水素原子と塩素原子の質量をそれぞれ，$m_{\mathrm{H}} = 1.7 \times 10^{-27}$ kg，$m_{\mathrm{Cl}} = 5.8 \times 10^{-26}$ kgとし，両者の結合距離を$r_0 = 1.3 \times 10^{-10}$ mとする。このとき，Θ_{rot}の値を有効数字1桁で求めなさい。

III

以下の問 1 〜 5 に答えなさい。

問 1　$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が複素数 $z = x + iy$ のみの関数で書ける場合，$u(x, y)$ と $v(x, y)$ は以下の関係式を満たすことを示しなさい。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

問 2　問 1 の関係式を用いて，$u(x, y)$ がラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たすことを示しなさい。また，$v(x, y)$ も同様にラプラス方程式を満たすことを示しなさい。

問 3　曲線 $u(x, y) = c_1$ と $v(x, y) = c_2$ は互いに直交することを示しなさい。ただし，c_1 と c_2 は実定数である。

問 4　$f(z) = z^2$ の場合，$u(x, y)$ と $v(x, y)$ を求めなさい。

問 5　真空中の電位 V はラプラス方程式を満たす。電位が x，y 方向にのみ変化する場合，

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

となる。図 1 の斜線部（$x \leq 0, y \leq 0$）には導体があり，$x = 0$ または $y = 0$ 上では電位は $V = 0$ である。また，$x > 0$ かつ $y > 0$ の領域は真空とする。その領域内で $V = 0$ となる点が存在しないような場合に，原点近傍の等電位面と電気力線の様子を図示しなさい。

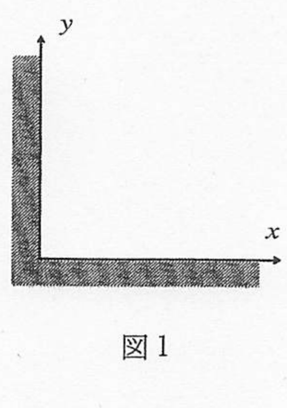

図 1