

2021年8月23日

物理 II 試験問題

(150分)

[注意事項]

- 1) 問題は I～III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。
- 2) 解答は問題毎に別の解答用紙 (計 3 枚) に記入すること。解答用紙に受験番号と氏名, 問題番号を記入すること。
- 3) 試験開始後は退出できません。

I

次式ハミルトニアンで表される質量 m 、固有振動数 ω の 1 次元調和振動子を、量子力学のハイゼンベルク描像を用いて考えよう。

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}(t)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}(t)^2$$

ただし、 $\hat{q}(t)$ と $\hat{p}(t)$ はそれぞれ時刻 t における座標演算子と運動量演算子で、同時刻交換関係 $[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ を満たす。ここで、演算子 $\hat{a}(t)$ を次のように定義する。

$$\hat{a}(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q}(t) + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}(t)$$

以下の問 1 ~ 問 5 に答えなさい。解答には導出過程も示しなさい。

問 1 同時刻交換関係 $[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar$ を用いて $[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1$ が成り立つことを示しなさい。また、ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ を演算子 $\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)$ を用いて表しなさい。ただし、 $\hat{a}^\dagger(t)$ は $\hat{a}(t)$ のエルミート共役演算子である。

問 2 ハイゼンベルク描像では、一般の演算子 $\hat{O}(t)$ の時間発展が交換関係

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}(t), \hat{H}(t)]$$

で与えられる。 $\hat{a}(t)$ の時間発展を解くことで、時刻 t における座標演算子 $\hat{q}(t)$ が

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-i\omega t}\hat{a}(0) + e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger(0))$$

で与えられることを示しなさい。

問 3 任意の複素数 A に対して、状態 $|A\rangle$ をエネルギー基底状態 $|0\rangle$ および時刻 $t=0$ における演算子 $\hat{a}^\dagger(0)$ を用いて以下のように定義する。

$$|A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} (\hat{a}^\dagger(0))^n |0\rangle$$

このとき、 $\hat{a}(0)|A\rangle = A|A\rangle$ が成り立つことを示しなさい。ただし、エネルギー基底状態 $|0\rangle$ が $\hat{a}(t)|0\rangle = 0$ を満たすことを用いてよい。

問 4 時刻 t における座標演算子 $\hat{q}(t)$ と運動量演算子 $\hat{p}(t)$ の期待値

$$\bar{q}(t) = \frac{\langle A|\hat{q}(t)|A\rangle}{\langle A|A\rangle}, \quad \bar{p}(t) = \frac{\langle A|\hat{p}(t)|A\rangle}{\langle A|A\rangle}$$

を求めなさい。

問 5 時刻 t における運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、全エネルギーの期待値をそれぞれ求め、問 4 で導入した $\bar{q}(t)$ や $\bar{p}(t)$ を用いて表しなさい。また、得られた結果をもとに、古典的な調和振動子との類似点・相違点を議論しなさい。

II

N 個 ($N \gg 1$) のスピンから成る単位体積の磁性体において、最近接格子点のスピン間に強磁性的な相互作用が働いている。この系の相互作用のエネルギー E を、 $E = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_{i=1}^N \sigma_i$ と表す。ここで σ_i は i 番目の格子点におけるスピン状態を表す変数で、 $\sigma_i = 1$ または $\sigma_i = -1$ の値を取る。 $\sum_{(i,j)}$ は全ての最近接対についての和である。 J はスピン間の相互作用を表す定数で $J > 0$ である。 μ はスピンの持つ磁気モーメント、 H は磁場である。以下の問1~問5に答えなさい。解答には導出過程も示しなさい。必要なら $n \gg 1$ について成り立つ近似式 $\log_e n! \simeq n \log_e n - n$ を用いてよい。

問1 N 個のスピンのうち、 $\sigma_i = 1$ のスピン数を N_+ 、 $\sigma_i = -1$ のスピン数を N_- とする。この状態におけるエントロピーを、 N 、 N_+ 、 N_- を用いて表しなさい。さらに、 $N_+ - N_- = NX$ とする時、エントロピーを N と X を用いて表しなさい。

問2 ある格子点に $\sigma_i = 1$ のスピンがある確率を $\frac{N_+}{N}$ 、 $\sigma_i = -1$ のスピンがある確率を $\frac{N_-}{N}$ と仮定する。最近接格子点の数を z とすると、エネルギーが $E = -\frac{1}{2} z J N X^2 - \mu H N X$ となることを示しなさい。

問3 ヘルムホルツの自由エネルギー F を計算し、この系が平衡状態となる条件を用いて、 $X = \tanh\left(\frac{z J X + \mu H}{k_B T}\right)$ となることを示しなさい。ここで、 k_B はボルツマン定数、 T は絶対温度である。

問4 $H = 0$ の時の強磁性状態への転移温度 T_C を、磁化 $M = -\frac{\partial F}{\partial H}$ の X 依存性を考察することで求めなさい。

問5 磁化率 $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial H}$ を $T > T_C$ の場合について求め、その温度変化の概形を図示しなさい。さらに、 χ がそのような温度変化を示す物理的な理由を、 $T \rightarrow \infty$ と、 $T \rightarrow T_C$ の各場合について定性的に説明しなさい。

III

2021年4月、NASAは火星でヘリコプターの飛行に成功した。図1はその時の画像、表1は公開されている情報である。この飛行について以下の問1～問4に答えなさい。解答には導出過程も示しなさい。

- 問1 ヘリコプターが火星で受ける重力を、ヘリコプターの質量 m 、地球上での重力加速度 g 、地球および火星の質量 M_E, M_M 、地球および火星の半径 R_E, R_M を用いて表しなさい。
- 問2 一般に、密度 ρ の気体に対して、速さ v で運動する翼状の物体に発生する揚力 L は、 $L = \frac{1}{2} \rho v^n S C_L$ となることが知られている。ここで、 S は図2に示されるように運動に垂直な方向から見た物体の面積を表し、 C_L は物体の形状で決定される無次元定数である。次元解析により、 v の次数 n を求めなさい。
- 問3 火星の大気圧は約 0.64 kPa、大気組成の最大成分は二酸化炭素である。地球の大気密度や、大気圧力、大気成分などの知識を用いて火星の大気密度 ρ_M を有効数字1桁で計算しなさい。
- 問4 火星の質量は地球の約 $1/10$ 、半径は地球の約 $1/2$ である。図1および表1の情報から適当なモデルをたて、ヘリコプターの受ける重力と揚力を比較しなさい。ただし $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を使い、 $C_L \sim 1$ と考えてよい。

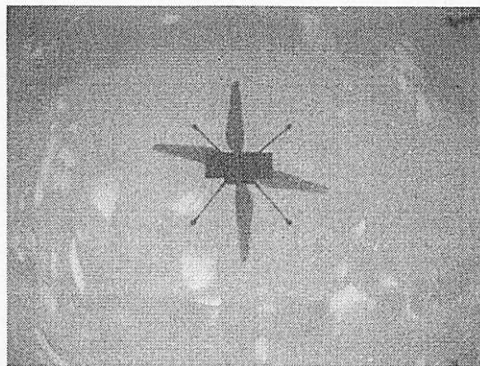


図 1: 火星で飛行したヘリコプターの影の画像 (https://mars.nasa.gov/system/resources/detail_files/25818_3-PIA24584-web.jpg)

表 1: 火星で飛行したヘリコプターの情報 (<https://mars.nasa.gov/technology/helicopter> より抜粋。)

mass	1.8 kg
total length of rotors	1.2 meters tip to tip
rotor blade full-speed	2400 RPM (註: rotations per minute)

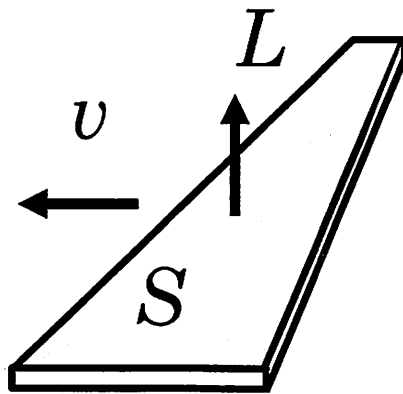


図 2: 物体の運動と揚力