2020 年 8 月 26 日

物理 II 試験問題

(150 分)

[注意事項]

1) 問題は I 〜 III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名, 問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

質量 m の粒子が次のポテンシャル $V(x)$ のもとで運動する 1 次元量子力学系を考える。

$$V(x) = -V_0\big[\delta(x-a) + \delta(x+a)\big]$$

ここで $V_0 > 0$, $a > 0$ とし, エネルギー E が $E < 0$ をみたす場合を考える。以下の問 1 ~ 問 5 に答えなさい。

問 1 $x \neq \pm a$ での時間によらない Schrödinger 方程式を書き, それに対する 2 つの独立な解を求めなさい。

問 2 一般に 1 次元量子力学系でポテンシャル $V(x)$ が偶関数のとき, 束縛状態の波動関数は偶関数または奇関数のいずれかであることを示しなさい。ただし 1 次元系の束縛状態に縮退がないことは証明なしで用いてよい。

問 3 $x = \pm a$ で波動関数に課される条件を求めなさい。

以下では波動関数が偶関数の場合を考える。

問 4 問 1 で求めた 2 つの独立解を用いて波動関数を書き下し, 問 3 の条件からどのような関係式が導かれるか答えなさい。

問 5 問 4 の式を用いてエネルギー固有値を決める式を導きなさい。それを用いて束縛状態が V_0 (>0) の大きさによらず必ず一つ存在することを示しなさい。

II

温度 T の熱浴と平衡状態にある N 個の独立な粒子からなる系を考える。粒子が分布する準位は 3 準位系で, エネルギー $E_1 = D$ の状態は 2 重縮退, エネルギー $E_0 = 0$ の状態は縮退がないとする。ここで, $D > 0$ である。ボルツマン定数を k として, 以下の問 1〜問 6 に答えなさい。

問 1 この系のエネルギー準位 E_1 と E_0 の分布数の比は, 絶対零度の極限と温度が無限大の極限でどうなるか, 温度 T におけるボルツマン分布を示し, それを用いて説明しなさい。

問 2 この系の分配関数とヘルムホルツの自由エネルギーを導出過程を含めて求めなさい。

問 3 問 2 の結果を使って, この系のエントロピーを導出過程を含めて求めなさい。次に, 絶対零度の極限と温度が無限大の極限におけるエントロピーの値をこの結果から求め, それと問 1 の結果との関係を説明しなさい。

問 4 この系の内部エネルギーと比熱を導出過程を含めて求めなさい。

問 5 問 4 で求めた比熱の結果を用いて, 絶対零度の極限と温度が無限大の極限でどういう値に収束するか, それぞれの極限での温度依存性を示して説明しなさい。また, 絶対零度の極限で求めた値に収束する理由を, 定性的に説明しなさい。

問 6 問 5 の結果から予想される比熱の温度依存性の概略をグラフで示しなさい。

III

質量 m の質点が次のポテンシャルのもとで運動している。

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}$$

ここで r は原点 O から質点までの距離を表し, α は定数である。以下の 問 1 ～ 問 5 に答えなさい。

問 1 質点の満たすべき運動方程式を導き, 質点の座標 $\vec{r}$ と運動量 $\vec{p}$ を用いて書き表しなさい。

問 2 質点の運動は初期条件で決まる 1 つの平面内に限定される。その理由を説明しなさい。

問 3 ルンゲ・レンツベクトルとよばれる次のベクトル

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + m\alpha \, \frac{\vec{r}}{r}$$

が時間に依存しないこと, すなわち保存量であることを示しなさい。ここで $\vec{L}$ は質点の角運動量である。

問 4 ベクトル $\vec{A}$ が角運動量 $\vec{L}$ と直交することを示しなさい。また, 次の関係式を示しなさい。

$$A^2 = m^2\alpha^2 + 2mEL^2$$

ここで E は質点のエネルギーであり, $A = |\vec{A}|$, $L = |\vec{L}|$ である。

問 5 この系にはいくつの保存量があると考えられるか, 問 3 と問 4 の結果をもとに答えなさい。