2019年8月21日

物理 I 試験問題
(150分)

【 注意事項 】

1) 問題はI〜IVの４問あります。４問すべてに解答すること。

2) 解答は問題ごとに別の解答用紙（計４枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。
なお，グラフ用紙（１枚）にも受験番号と氏名を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

慣性系 S を考え，直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x,\, \boldsymbol{e}_y,\, \boldsymbol{e}_z$ を用い，運動する物体の位置を $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{e}_x + y(t)\,\boldsymbol{e}_y + z(t)\,\boldsymbol{e}_z$ で表す。また速度を $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$，加速度を $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$ で表す。これに対して z 軸まわりに一定の角速度 ω で回転する回転系 S' を考える。また，角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = (0,\, 0,\, \omega)$ とする。回転系 S' の直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}'_x,\, \boldsymbol{e}'_y,\, \boldsymbol{e}'_z$ は，以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_x &= \cos\omega t\ \boldsymbol{e}_x + \sin\omega t\ \boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}'_y &= -\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_x + \cos\omega t\ \boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}'_z &= \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

以下の問 1 ～ 4 に答えなさい。

問 1　$\boldsymbol{r}(t) = x'(t)\,\boldsymbol{e}'_x + y'(t)\,\boldsymbol{e}'_y + z'(t)\,\boldsymbol{e}'_z$ で与えられる $(x'(t),\, y'(t),\, z'(t))$ を回転系 S' の座標とする。$x(t),\, y(t),\, z(t)$ を用いて $x'(t),\, y'(t),\, z'(t)$ を表しなさい。

問 2　回転系 S' 上の見かけの速度を $\boldsymbol{v}'(t) = \dfrac{dx'(t)}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \dfrac{dy'(t)}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \dfrac{dz'(t)}{dt}\boldsymbol{e}'_z$ とするとき，$\boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(t)$ となることを示しなさい。

問 3　回転系 S' 上の見かけの加速度を $\boldsymbol{a}'(t) = \dfrac{d^2x'(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}'_x + \dfrac{d^2y'(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}'_y + \dfrac{d^2z'(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}'_z$ とするとき，$\boldsymbol{a}'(t) = \boldsymbol{a}(t) - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(t))$ となることを示しなさい。

問 4　地球の赤道上に建つ，高さ 1000 m のタワーの頂上から物体を静かに放した。物体はタワーに触れることなく地表面へ落下した。タワーの頂上と地球中心を結ぶ直線から落下地点はどの方向へどれだけ離れているか求めなさい。なお，地上の重力加速度は $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする。また，空気抵抗の影響は考えないものとする。

II

単位体積あたり n 個の自由電子を含む，一様な希薄プラズマ中を伝播する電磁波を考える。電子の電荷は $-e$，質量は m とする。このプラズマは中性で，電荷密度はゼロとしてよい。また，正イオンは重く，その運動は考えなくてよい。このとき，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ はマクスウェル方程式

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,,
\end{aligned}
$$

に従う。$\boldsymbol{J}$ は電流密度であり，$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}m^{-2}}$ と $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{NA^{-2}}$ はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。以下の問 1 〜 5 に答えなさい。必要であれば，任意のベクトル $\boldsymbol{C}$ に対する，次の公式を用いてよい。

$$
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{C}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{C}) - \nabla^2 \boldsymbol{C}
$$

問 1　電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$
\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}
$$

を満たすことを示しなさい。

問 2　電子の速度を $\boldsymbol{v}$ としたとき，$\boldsymbol{J}$ を $\boldsymbol{v}$ を用いて表しなさい。また，$\dfrac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}$ が $\boldsymbol{E}$ に比例することを示しなさい。このときの比例定数も求めなさい。ただし，電子に対する磁場の効果は無視してよい。

問 3　z 軸方向に進行する電磁波の電場が $\boldsymbol{E} = (0,\, E_0\, e^{i(kz-\omega t)},\, 0)$ と表されている。このとき磁束密度が

$$
\boldsymbol{B} = (-\frac{k}{\omega} E_0\, e^{i(kz-\omega t)},\, 0,\, 0)
$$

となることを示しなさい。また，電磁波の進行方向と $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ の関係を図示しなさい。ただし，E_0，k，ω は定数である。

問 4　$\omega^2 \geq \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ でなければ電磁波は伝わらないことを示しなさい。

問 5　電離層では $n = 10^5\,\mathrm{cm^{-3}}$ である。テレビ電波 ($\dfrac{\omega}{2\pi} \simeq 10^9\,\mathrm{Hz}$) は電離層を透過するが，AM ラジオ電波 ($\dfrac{\omega}{2\pi} \simeq 10^5\,\mathrm{Hz}$) は透過できないことを示しなさい。ただし，$m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$，$e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ とする。

III

1モルの気体を作業物質とする熱機関について，図のような熱サイクル(A→B→C→D→A)を行った。ここで過程A→BとC→Dは断熱変化，過程B→Cは等圧変化，過程D→Aは等積変化であり，状態A, B, C, Dでの体積はそれぞれ$V_{\mathrm{A}}, V_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{C}}, V_{\mathrm{D}}$，圧力はそれぞれ$p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{C}}, p_{\mathrm{D}}$，温度はそれぞれ$T_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{B}}, T_{\mathrm{C}}, T_{\mathrm{D}}$である。また，定圧モル比熱を$C_p$，定積モル比熱を$C_v$，気体定数を$R$とする。以下の問1～5に答えなさい。

問1　熱機関に対して，外部からΔQの熱量が与えられ，ΔWの仕事をされたとき，気体の内部エネルギーがΔUだけ変化した。このとき$\Delta Q, \Delta W, \Delta U$の間に成り立つ関係を書きなさい。

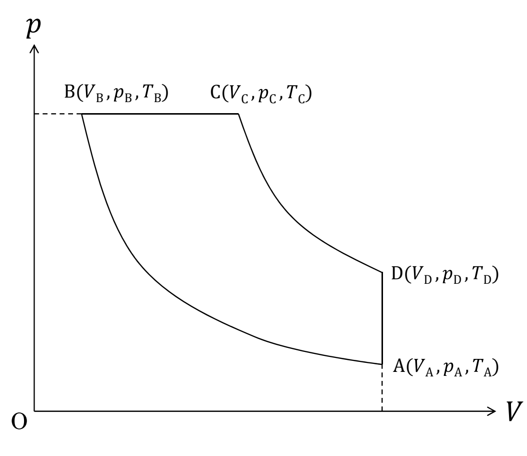
問2　微小な体積ΔVだけ変化したとき，外部から気体になされた仕事は$\Delta W = -p\Delta V$とかける。気体の内部エネルギーUを，温度Tと体積Vの関数とみなし，定積比熱C_vと定圧比熱C_pの差$C_p - C_v$を求めなさい。

次に，作業物質が1モルの理想気体である場合を考える。

問3　過程B→Cおよび過程D→Aにおいて，外部から与えた熱量Q_{BC}およびQ_{DA}をそれぞれ$T_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{B}}, T_{\mathrm{C}}, T_{\mathrm{D}}$を用いて表しなさい。

問4　このサイクルの熱効率ηを$T_{\mathrm{A}}, T_{\mathrm{B}}, T_{\mathrm{C}}, T_{\mathrm{D}}$を用いて表しなさい。

問5　過程A→B, B→C, C→DおよびD→Aにおいて生じたそれぞれのエントロピーの変化$S_{\mathrm{AB}}, S_{\mathrm{BC}}, S_{\mathrm{CD}}, S_{\mathrm{DA}}$を求めなさい。



IV

実験のデータ処理に関して，以下の問 1 ～ 4 に答えなさい。

問 1　あるガンマ線源と検出器の間に金属板を設置する。様々な厚さの金属板に対して，単位時間あたりのガンマ線の検出回数を計測したところ，表 1 の結果となった。金属板の厚さと計数の関係を解答用紙の片対数グラフに記入しなさい。またグラフの各点には計数に対する誤差を誤差棒として概算で記入しなさい。

金属板の合計の厚さ (mm)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
計数	990	574	349	208	129	71	45	27	16

表 1

問 2　金属板のガンマ線に対する吸収係数を k としたとき，金属板の厚さ x と計数 I には

$$I = I_0 \exp(-kx)$$

の関係がある。I_0 は金属板が無いときの計数である。表 1 の各測定は独立に行われたものとし，最適な k の値を有効数字 2 桁でグラフより求めなさい。ただし，厚さ x の誤差は無視してよい。必要であれば $\log_e 10 = 2.30$，$\log_e 2 = 0.693$ を用いなさい。

問 3　ある鉄球の外径 d の測定をマイクロメータを用いて同じ方法で 4 回繰り返し行ったところ，表 2 の結果を得た。

外径 d (mm)	11.003	10.999	11.001	10.997

表 2

測定値の系統誤差は無視できるほど小さく，測定値のばらつきは統計誤差のみに由来するものとする。外径 d の値を有効数字 5 桁で表しなさい。またこの d の誤差を求めなさい。必要であれば以下の概数を用いなさい。

$$\sqrt{2} = 1.4142, \quad \sqrt{3} = 1.7321, \quad \sqrt{5} = 2.2361$$

問 4　問 3 とは別の鉄球の外径 d と重さ m を測定したところ，それぞれ $d = 10.0 \pm 0.1$ mm, $m = 5.0 \pm 0.2$ g であった。外径と質量の測定は完全に独立であるとして，この鉄球の密度 ρ を有効数字 2 桁で表し，誤差を含めて求めなさい。