

2018年8月22日

物理 II 試験問題 (150分)

[注意事項]

- 1) 問題は I ~ III の 3 問あります。3 問すべてに解答すること。
- 2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 3 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。
- 3) 問題 III については，すべてのグラフ用紙（計 3 枚）に受験番号と氏名を記入し，試験終了後に未使用のものも含めてすべて提出すること。
- 4) 試験開始後は退室できません。

I

無限に深い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ +\infty & (x \leq 0, x \geq L) \end{cases}$$

をもつ1次元量子力学系（以下ではV系とよぶ）について、以下の問1～6に答えなさい。ただし、粒子の質量を m とする。

問1 $x = 0$ と $x = L$ で、V系の波動関数 $\varphi(x)$ に課される条件は何か答えなさい。

問2 V系のエネルギー固有関数 $\varphi_n(x)$ と固有値 E_n をすべて求めなさい。このとき、 $n = 0, 1, 2, \dots$ 、および、 $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ とする。（ただし、波動関数の規格化定数は求めなくてもよい。）

問3 V系の基底状態の固有関数 $\varphi_0(x)$ は、次の微分方程式を満たすことを示しなさい。

$$X\varphi_0(x) = 0, \quad X \equiv \sqrt{\frac{1}{2m}} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\pi\hbar}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

問4 $Y \equiv \sqrt{\frac{1}{2m}} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\pi\hbar}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$ で定義される微分演算子 Y と問3で定義された X を用いると、V系のハミルトニアン $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ ($0 < x < L$) を $H = YX + C$ ($0 < x < L$) と表すことができる。このとき、 C を求めなさい。

問5 新しいポテンシャル $V'(x)$ を

$$V'(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)} & (0 < x < L) \\ +\infty & (x \leq 0, x \geq L) \end{cases}$$

で定義したとき、 X と Y を用いて、 V' 系のハミルトニアン $H' = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V'(x)$ ($0 < x < L$) を $H' = XY + C'$ ($0 < x < L$) と表すことができる。このとき、 C' を求めなさい。

問6 V' 系のエネルギー固有関数 $\varphi'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) は、V系のエネルギー固有関数 $\varphi_n(x)$ を用いて、 $\varphi'_n(x) \equiv X\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) で与えられる。このとき、 $\varphi'_n(x)$ のエネルギー固有値 E'_n ($n = 1, 2, \dots$) をすべて求めなさい。

II

結晶の比熱を説明するために、Einstein は同じ固有角振動数 ω をもつ N 個の量子調和振動子からなる模型を考察した。しかしながら、その模型から得られた比熱は低温での実験結果を説明できなかつた。そこで、Debye は異なる角振動数 ω をもつ N 個の振動子を考察することによって、低温での実験結果を説明する模型を提唱した。Debye 模型の内部エネルギー $U(T)$ は、固有角振動数 ω をもつ 1 個の振動子に対する内部エネルギー $u(T, \omega)$ を用いて、

$$U(T) = \int_0^{\omega_D} u(T, \omega) g(\omega) d\omega \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 T は温度である。また、 $g(\omega)$ は次式

$$g(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^2 \quad (2)$$

で与えられ、 $g(\omega)d\omega$ は角振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある振動子の自由度の数を与える。 ω_D は Debye 振動数とよばれる定数である。以下の問 1 ~ 6 に答えなさい。

- 問 1 固有角振動数 ω をもつ 1 個の量子調和振動子を考える。この調和振動子のエネルギー固有値は、 $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である。この系の分配関数 $Z(T, \omega)$ を求めなさい。
- 問 2 問 1 で求めた分配関数 $Z(T, \omega)$ から、内部エネルギー $u(T, \omega)$ を求めなさい。また、高温極限での $u(T, \omega)$ の表式を求め、エネルギー等分配則との関係を議論しなさい。
- 問 3 (2) 式で定義される $g(\omega)$ の積分 $\int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega$ を計算して、その積分量の物理的意味を説明しなさい。
- 問 4 Debye 模型では、(1) 式のように ω 積分の上限値は (無限大ではなく) ω_D の有限量で与えられると仮定される。このように仮定する理由について、結晶構造の観点から、物理的意味を説明しなさい。
- 問 5 (1) 式右辺に問 2 で求めた $u(T, \omega)$ を代入し、 $U(T)$ から Debye 模型の定積比熱 $C_V(T)$ の表式を求めなさい。ただし、 ω に関する積分はそのままかまわない。
- 問 6 問 5 で求めた Debye 模型の定積比熱 $C_V(T)$ は、高温極限で温度によらない一定値に近づき、低温極限で T^3 に比例することを示しなさい。ただし、低温極限では、(1) 式の積分の上限値 ω_D を ∞ に置き換えてかまわない。

III

以下の問1～3に答えなさい。

問1 図1(ア)～(エ)は、実験でよく用いられる工具のイラストである。それぞれに合う名称を(a)～(d)から、用途を(1)～(4)から選びなさい。

- 名称 (a) ペンチ (b) スパナ (c) ノギス (d) ラジオペンチ
- 用途 (1) 線材など細かなものをつかむ・曲げる
(2) 物の外径・内径・深さを測る
(3) 板状の物をつかむ・曲げる・線材を切る
(4) ボルト・ナットを緩める・締める

問2 $R = 50 \Omega$ の抵抗 R を用いて図2のような回路を作り、コンデンサー C の電気容量 C を求める実験を行った。

- (a) 電源電圧を V_0 (一定), $t = 0$ でスイッチ S を閉じてから時間 t が経過したときの抵抗 R の両端の電位差を V_R とすると, $t = 0$ でコンデンサーが完全に放電している場合, $V_R = V_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$ となることを示しなさい。
- (b) t に対する V_R の変化を測定したところ, 表1に示す結果が得られた。最もふさわしいグラフ用紙を一つ選んで t に対する V_R の変化をプロットすることにより, 電気容量 C を有効数字二桁で求めなさい (導出過程が分かるように解答すること)。必要ならば, $\log_e 10 = 2.30$, $\log_e 2 = 0.693$ を用いてよい。

問3 コンパクトディスク (CD) は, デジタルデータの ON と OFF をレーザーの反射光の明暗として読み出す記録媒体である (図3)。図4の様にデータを記録している A 列と帯状の反射する B 列が交互に並んでいる。

- (a) CD の記録部分は円盤の中の外径 120 mm, 内径 40 mm に囲まれた部分である。これに約 700 MByte (= $700 \times 10^6 \times 8 \text{ bit} = 5.6 \times 10^9 \text{ bit}$ の ON/OFF に対応) のデータが記録されている。データ密度から 1 bit あたりの面積を見積もりなさい。ただし, A 列も B 列も等しい幅であると考えて答えなさい。さらに 1 bit を記録する部分は正方形だとして, B 列の中心間の間隔 d を有効数字一桁で求めなさい。
- (b) 太陽光を CD で反射させると虹色に見えるのは等間隔に並んだ B 列が図5の様な回折格子を形成しているためである。入射角を α , 反射角を β として反射した光の強め合う条件を答えなさい。さらに, 白色光を細いスリットによって $\alpha = 70^\circ$ で入射させたとき, 反射された光が $\beta = 15^\circ \sim 30^\circ$ で観測された。 15° と 30° で観測されたのは何色と何色の光か強め合う条件を用いて答えなさい。ただし, 必要な物理量は自ら定義して解答しなさい。

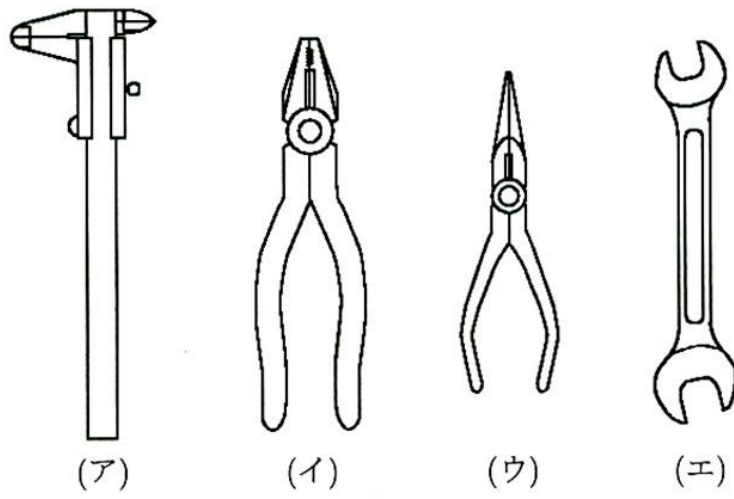


図1

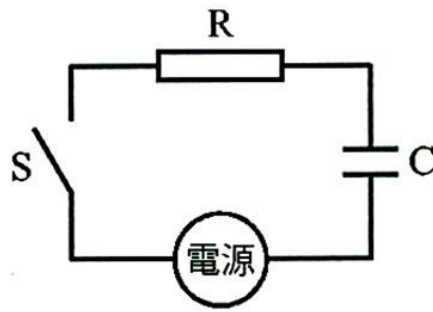


図2

表1

t (ms)	0	0.020	0.040	0.060	0.080	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18
V_R (V)	4.9	3.3	2.3	1.5	1.0	0.66	0.46	0.29	0.21	0.14

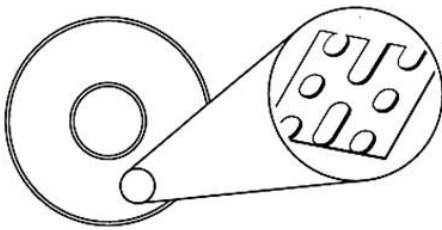


図3

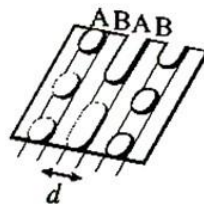


図4

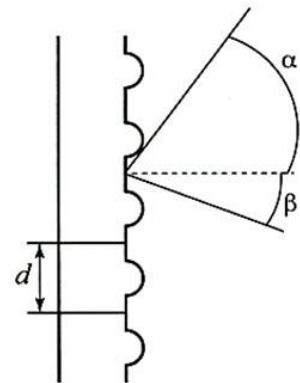


図5