2018年8月22日

物理I試験問題

(150分)

[注意事項]

1) 問題はI～IVの4問あります。4問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計4枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

ハンマーを投げたときの運動を考察する。ハンマーのモデルとして長さl，質量mの一様な棒に半径L，質量Mの一様な球が取り付けられている物体を考える。ここで，重力加速度はgとして，以下の問1～5に答えなさい。

問1 このハンマーの球の中心から重心Gまでの距離sを求めなさい（図1）。

問2 水平方向をx軸，鉛直方向をy軸とする。$t=0$で重心Gは原点にあり，重心Gの運動が初速度v_0で水平から角度θとなるようにハンマーを投げた（図2）。重心がどのような運動をするか説明し，重心の最高点での座標を答えなさい。

問3 重心まわりの慣性モーメントI_{G}を求めなさい。

問4 球を鉛直下方向にし，球を振り上げるようにハンマーを投げた。ハンマーは重心Gを中心に角速度ω_0で回転しながら，重心Gが水平から角度θで初速度v_0をもってxy平面内で運動を始めた（図3）。重心Gが最高点で，ハンマーが半回転して球が丁度上部に来るω_0を答えなさい。ただし，$t=0$で重心Gは原点にあるものとする。重心まわりの慣性モーメントをI_{G}としてよい。

問5 より強く回転を加え，$\omega=3\omega_0$で投げたときの重心Gと球の中心について，それぞれの軌跡の概略を図示しなさい。

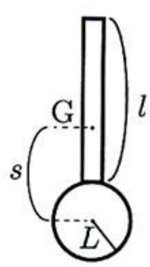


図1

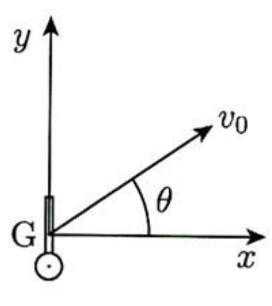


図2

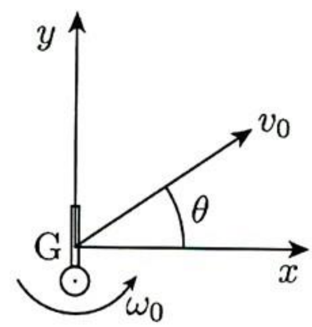


図3

II

図1のような，半径 a の円柱状の内部導体を同軸の半径 b $(b > a)$ の薄い円筒状の外部導体が囲んでいる同軸ケーブルのモデルを考える。2つの導体間には，誘電率 ε，透磁率 μ の絶縁体で満たされているとして，以下の問1~5に答えなさい。ただし，導体の長さに沿った方向を z 軸とし，導体は無限に長く，導体の抵抗と外部導体の厚さは無視できるものとする。

問1 内部導体，外部導体にそれぞれ単位長さあたり $+Q$，$-Q$ の電荷を一様に与えたとき，半径 r $(a < r < b)$ の位置での電場の大きさ E とその向きを答えなさい。また，2つの導体間の電位差 V と，z 方向の単位長さあたりの電気容量 C を求めなさい。

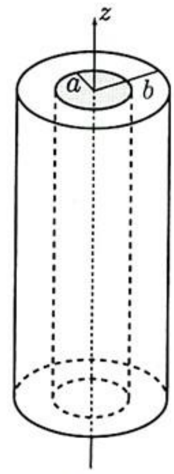


図1

問2 内部導体に大きさ I の直流電流を $+z$ 向きに，同じ大きさ I で反対向きの直流電流を外部導体に一様に流した場合，半径 r $(a < r < b)$ の位置での磁束密度 B とその向きを答えなさい。また，この同軸ケーブルの単位長さあたりの磁束 Φ と，単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めなさい。

問3 同軸ケーブルは問1と問2で求めた電気容量 C と自己インダクタンス L を用いて，図2のような等価回路で近似できる。位置 z，時刻 t での電圧 $V(z,t)$ と電流 $I(z,t)$ を図2のように定義した場合，一つのコイルの両端の電位差 $V(z+\Delta z,t) - V(z,t)$ と電流 $I(z,t)$ の関係を答えなさい。

問4 図2の電圧，電流の変化の関係より，

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} = LC\,\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2}$$

を導出しなさい。また，この関係は電磁波 $V(z,t) = V_0\,e^{i(\omega t - kz)}$ が同軸ケーブル内を進んでいくことを表している。ここで ω は角周波数，k は波数で，進行 (位相) 速度 v との間に $\omega = vk$ という関係がある。この v を L と C で表しなさい。

問5 問4の速度が絶縁体の性質のみで決まることを示しなさい。また絶縁体として，誘電率 $\varepsilon = 2\varepsilon_0$，透磁率 $\mu = \mu_0$ の物質を使った場合，電磁波の進行速度は光速度との比でいくらとなるか有効数字一桁で答えなさい。ただし，ε_0，μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。

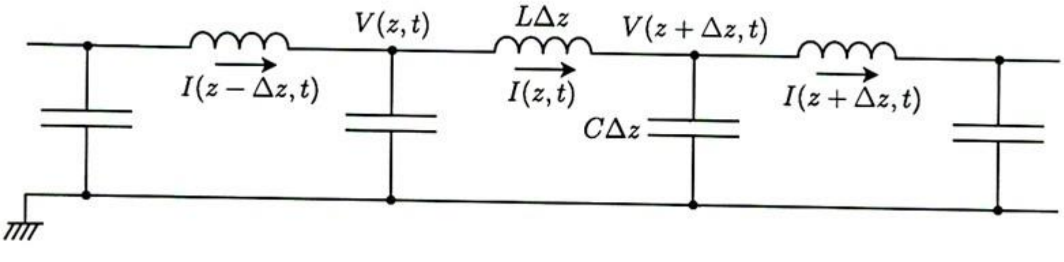


図2

III

図のように，質量が m と M の 2 種類の質点を x 軸上に等間隔 a で交互に多数並べ，バネ定数 K のバネでつないで両端を固定する。質点が平衡位置にあるときバネは自然長であるとし，質点は x 方向のみに運動するとする。また，質点に端から順に番号をつけ，n 番目の質点の平衡位置からの変位を $u_n(t)$ とする $(n = 1, 2, \cdots)$。この系で生じる振動と波動に関する以下の問 1〜5 に答えなさい。

問 1　$2n-1$ 番目の質量 m の質点と $2n$ 番目の質量 M の質点に対する運動方程式をそれぞれ書きなさい。

問 2　すべての質点が同じ角振動数 ω の単振動をする解を求めるために

$$\begin{cases} u_{2n-1}(t) = A_{2n-1}\cos(\omega t + \phi) \\ u_{2n}(t) = B_{2n}\cos(\omega t + \phi) \end{cases} \tag{1}$$

とおいて運動方程式に代入し，振幅 A_n と B_n に対する連立方程式を導きなさい。

問 3　さらに，波数 k をもつ波の解を求めるために

$$\begin{cases} A_{2n-1} = A\sin(k\,x_{2n-1}) = A\sin\{k\,(2n-1)a\} \\ B_{2n} = B\sin(k\,x_{2n}) = B\sin\{k\,(2n)a\} \end{cases} \tag{2}$$

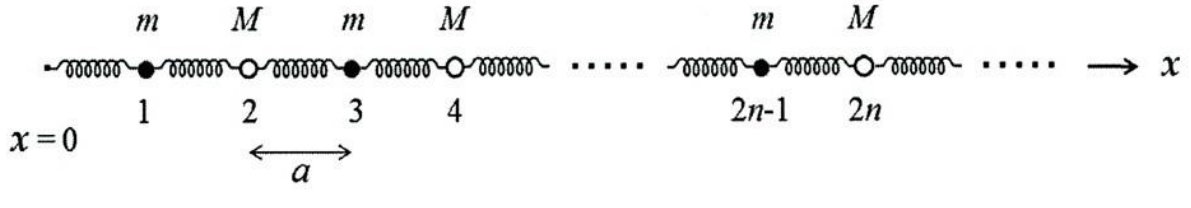
とおく。ここで，A と B は定数，$x_n = na$ は n 番目の質点の平衡位置である。(2) 式を問 2 の結果に代入することにより，A と B に関する関係式

$$\begin{cases} (m\omega^2 - 2K)\ A + 2K\cos(ka)\ B = 0 \\ 2K\cos(ka)\ A + (M\omega^2 - 2K)\ B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

が導かれることを示しなさい。また，(3) 式から，角振動数の 2 乗 ω^2 を波数 k の関数として求めなさい。

問 4　問 3 で求めた角振動数 ω と波数 k の関係式の概略を，横軸を波数 k $(-\frac{\pi}{2a} \le k \le \frac{\pi}{2a})$，縦軸を角振動数 ω に取ったグラフに描きなさい。

問 5　同じ波数に対して異なる角振動数をもつ 2 つのモードが存在する。2 種類の質点に対する波の位相は 2 つのモードでどのような違いがあるか，A と B の相対符号を調べることにより説明しなさい。



IV

2018年11月に開かれる国際度量衡総会で，国際単位系7基本単位のうち4つ，キログラム，アンペア，ケルビン，モルの定義の改訂が決議承認され，2019年5月20日に施行される予定である。単位にまつわる以下の問1～5に答えなさい。

問1　メートル(m)の定義は,『メートル(m)は長さの単位であり，その大きさは，真空中の光速度cの数値を299792458 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$と定める』ことによって設定される。電子レンジで使われているマイクロ波の周波数は2.45 GHzで，その波長は約1.2×10^{a} mである。整数aの値を答えなさい。

問2　キログラム(kg)の新しい定義は，これまでのキログラム原器に代わって,『プランク定数hの値を正確に$6.62607015 \times 10^{-34}$ $\mathrm{J \cdot s}$と定める』ことによって設定される予定である。1 kgの静止質量に対応するエネルギーは，波長532 nm（緑色レーザーポインタの光に相当）の光子約2.4×10^{b}個分のエネルギーと等価である。整数bの値を答えなさい。

問3　質量の定義を，キログラム原器から，プランク定数を使った定義に変えることによって，得られるメリットを2つ挙げなさい。

問4　ケルビン(K)の新しい定義は,『ボルツマン定数の値を正確に1.380649×10^{-23} $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$と定める』ことによって設定される予定である。宇宙マイクロ波背景放射は，COBEの観測によって，$T = 2.725$ Kのプランク分布をしていることが明らかになった。このとき，プランク分布のピークでの光の周波数は約1.6×10^{e} Hzである。整数eの値を答えなさい。

問5　モル(mol)の新しい定義は,『アボガドロ数を正確に$6.02214076 \times 10^{23}$個と定める』ことによって設定される予定である。直径9.4 cmのシリコン結晶からなる球の中にシリコン原子がアボガドロ数の約3.6×10^{f}倍含まれている。整数fの値を答えなさい。なお，シリコン結晶は立方晶をなし，格子定数は5.43×10^{-10} mである。そして，格子定数を一辺の長さとする立方体の各頂点に1つ，各面中央に1つ，内部に4つのシリコン原子を含む。