2017年8月24日

物理 II 試験問題
(150分)

[注意事項]

1) 問題はＩ～IIIの3問あります。3問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計3枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

1 次元ポテンシャル中の粒子に関する以下の問 1〜5 に答えなさい。

問 1　ポテンシャル $V(x)$ の中にある質量 m の粒子に対する時間に依存しない 1 次元シュレディンガー方程式を書きなさい。ただし，$\hbar = h/(2\pi)$, h はプランク定数とする。

問 2　図 1 のように，無限に深い井戸型ポテンシャル $V(x)$ の中にある質量 m の粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le a) \\ \infty & (x < 0, a < x) \end{cases}$$

この粒子の固有波動関数が

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で与えられることを導きなさい。また，エネルギー固有値 E_n を求めなさい。

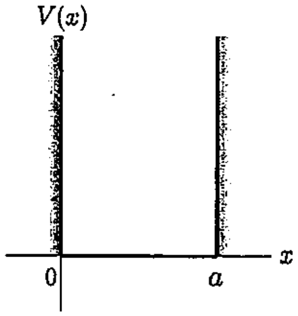

図 1

問 3　図 1 の井戸型ポテンシャル中で基底状態 $\psi_1(x)$ にある粒子が $0 \le x \le a/4$ の領域に存在する確率を求めなさい。また，同じポテンシャル中で古典的粒子が運動している場合の存在確率と比較しなさい。

問 4　図 1 のポテンシャルに対して，図 2 のように，井戸の底の半分が $b(> 0)$ だけ上昇した摂動ポテンシャル $V_b(x)$ が加わった。

$$V_b(x) = \begin{cases} b & (0 \le x \le a/2) \\ 0 & (x < 0,\ a/2 < x) \end{cases}$$

エネルギー E_n に対する 1 次補正 E_n^1 を求めなさい。

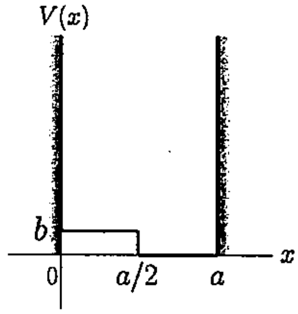

図 2

問 5　位置 x と運動量 p の期待値を $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ とし，$\Delta x = x - \langle x \rangle$ と $\Delta p = p - \langle p \rangle$ を定義する。図 1 の井戸型ポテンシャル中の固有状態 $\psi_n(x)$ に対して，位置と運動量の不確定さの積 $\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle}$ を計算しなさい。必要であれば，次の不定積分の式を使いなさい。

$$\int y \sin^2 y dy = \frac{y^2}{4} - \frac{y}{4} \sin 2y - \frac{1}{8} \cos 2y$$

$$\int y^2 \sin^2 y dy = \frac{y^3}{6} - \frac{2y^2 - 1}{8} \sin 2y - \frac{y}{4} \cos 2y$$

II

単原子気体が固体表面に吸着する問題を考える。互いに相互作用しない単原子気体と固体表面が温度 T の熱浴に接しているとする。固体表面は N 個の吸着サイトからなっており，1サイトあたり最大で1個の単原子気体を吸着できる。すべての吸着サイトは等価であると仮定し，吸着サイトに単原子気体が吸着していない場合のエネルギーを 0, 単原子気体が1個吸着した場合のエネルギーを $-\epsilon(\epsilon > 0)$ とする。また，単原子気体の化学ポテンシャルを μ とする。以下の問1〜6に答えなさい。

問1　各サイトの大分配関数 $\xi = \sum_j \exp\left[-\beta(E_j - \mu N_j)\right]$ を求めなさい。ただし，$\beta = 1/(k_B T)$（k_B はボルツマン定数），E_j は状態 j のエネルギー，N_j は状態 j の粒子数を表すものとする。

問2　N 個の吸着サイトからなる系全体の大分配関数 Ξ を求めなさい。

問3　平均吸着分子数 N_a を求めなさい。

問4　$e^{\beta\mu}$ は逃散能と呼ばれる量で，

$$e^{\beta\mu} = \frac{p}{k_B T}\left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{3/2}$$

と表すことができる。ここで p は単原子気体の圧力，h はプランク定数，m は単原子気体の質量である。この関係式を用いて問3の結果を $N_a = Np/(p + p_0(T))$ という形に書き直したとき，$p_0(T)$ の具体的な表式を求めなさい。また，$p_0(T)$ は T の関数としてどのようにふるまうか，その概形をかきなさい。

問5　ある一定温度の条件下で気体の圧力 p を変化させていくと，固体表面の被覆率 N_a/N は p/p_0 の関数としてどのように変化していくか図示しなさい（この関係は Langmuir の等温吸着式と呼ばれる）。

問6　上記の考察において，$\epsilon < 0$（吸着によってエネルギーが上昇する）の場合でも，有限温度の場合には固体表面には単原子気体が少数ではあるが吸着することが示される。なぜそのようなことが起こるのか，定性的に理由を説明しなさい。

III

以下の問 1〜6 に答えなさい。

はじめに，次のハミルトニアン H_0 を考える。

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \quad \omega > 0$$

ここで a, $a^\dagger$ は交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす演算子である。

問 1　$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で定義される状態に対して次の関係式が成り立つことを示しなさい。ただし $a|0\rangle = 0$ とする。

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

問 2　状態 $|n\rangle$ が H_0 の固有状態であることを示し，その固有値を求めなさい。

次に，z 軸方向の一様磁場 B (> 0) のもとで 2 次元 xy 平面内を運動する質量 M，電荷 e (> 0) の粒子を考える。この系のハミルトニアンはベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて次のように書ける。

$$H = \frac{1}{2M}\left[(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2\right]$$

問 3　演算子 $\Pi_x = p_x - eA_x$, $\Pi_y = p_y - eA_y$ を定義するとき，交換関係 $[\Pi_x, \Pi_y]$ を求めなさい。

問 4　Π_x, Π_y の線形結合で次の交換関係を満たす演算子 b をつくりなさい。

$$[b, b^\dagger] = 1$$

また，b, $b^\dagger$ を用いてハミルトニアン H を書き表し，H のエネルギー固有値を求めなさい。

問 5　ベクトルポテンシャルを $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ ととり，$\zeta = x + iy$ とおく。b, $b^\dagger$ を ζ, ζ^* で書き表しなさい。

問 6　基底状態 $|0\rangle$ は $b|0\rangle = 0$ で定義される。基底状態の波動関数が次のように与えられることを示しなさい（C は規格化定数)。

$$\psi_m(\zeta, \zeta^*) = C\zeta^m \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar}\zeta^*\zeta\right), \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

また，角運動量 L_z の $\psi_m(\zeta, \zeta^*)$ に対する固有値を求めなさい。