2017年8月24日

物理 I 試験問題

(150分)

[注意事項]

1) 問題は I ～ IV の 4 問あります。4問すべてに解答すること。

2) 解答は問題毎に別の解答用紙（計 4 枚）に記入すること。
各解答用紙に受験番号と氏名，問題番号を記入すること。

3) 試験開始後は退室できません。

I

質量 m_1 と m_2 の原子からなる 2 原子分子の結合方向の一次元の運動を考える。原子間の距離を x とし，2 原子間には

$$f(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} \qquad \text{ただし}\ a > 0, b > 0, x > 0$$

で表される力が働いているものとする。以下の問 1〜5 に答えなさい。ただし，原子は質点と見なせるものとする。

問 1　2 原子分子からなる系の換算質量 μ を求め，2 原子分子の相対運動の運動方程式を表しなさい。

問 2　ポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めなさい。ただし，ポテンシャルエネルギーの基準は $U(\infty) = 0$ とする。

問 3　ポテンシャルエネルギー $U(x)$ の安定平衡点 x_0 を求め，$U(x)$ の概略を描きなさい。

問 4　2 原子分子が安定平衡点 x_0 を中心に振幅 δ で微小振動するとき，振動運動の解 $x(t)$ を求めなさい。

問 5　塩素 35 で同位体置換した塩化水素分子 $H^{35}Cl$ の H 原子と Cl 原子との振動運動を観測したところ，周波数 $\nu = 8.7 \times 10^{13}$ Hz の赤外領域で振動のスペクトルが観測された。分子振動が安定平衡点周りの一次元の振動であるとしたときのばね定数 k を，有効数字 2 桁で求めなさい。ただし，水素の質量数は 1.0，塩素 35 の質量数は 35，アボガドロ数を 6.0×10^{23} mol^{-1} とする。

II

図に示すように，真空中におかれた一辺 a の正方形の導線閉回路が，原点 O を中心とした xy 面内にある。この回路に反時計回りに電流 I を流した。この回路上の点 S を位置ベクトル $\vec{s}=(x',y',z')$ で表し，点 S における微小部分を $d\vec{s}=(dx',dy',dz')$ とする。点 S を流れる電流が位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ の点 P に作るベクトルポテンシャルは，μ_0 を真空の透磁率として

$$d\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|}$$

で与えられる。以下の問 1〜5 に答えなさい。必要な物理量があれば各自で定義しなさい。

問 1　回路上の辺 AB を流れる電流 I が回路から十分離れた位置 $\vec{r}$ の点 P(ただし $r=|\vec{r}|\gg a$) に作るベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ は，$\vec{e}_x$ を x 方向の単位ベクトルとするとき，次の式で与えられることを示しなさい。

$$\vec{A}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r}\left(1+\frac{ya}{2r^2}\right)\vec{e}_x$$

必要があれば以下の近似式を用いなさい。

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{r^2}\right)$$

問 2　この正方形閉回路を流れる電流が，回路から十分に離れた位置 $\vec{r}$ の点 P に作るベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ を求めなさい。

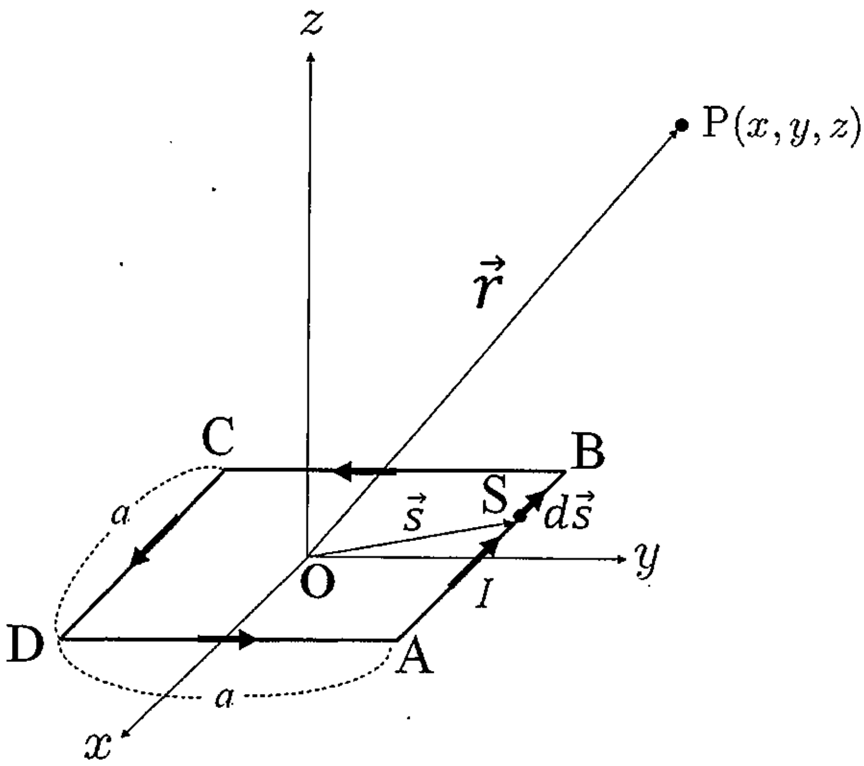
問 3　閉回路を流れる電流は磁気双極子モーメント $\vec{m}$ と等価であることが知られおり，磁気双極子モーメントは回路に沿った $d\vec{s}$ の一周線積分で

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\mu_0 I\oint\vec{s}\times d\vec{s}$$

と定義される。図の正方形閉回路を流れる電流による磁気モーメント $\vec{m}$ を求めなさい。また，ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を磁気モーメント $\vec{m}$ を用いて表しなさい。

問 4　正方形閉回路を流れる電流が点 P に作る磁束密度 $\vec{B}$ を求めなさい。

問 5　正方形閉回路を原点 O を中心とした半径 a の円環状回路に変えて電流 I を流した。問 4 で求めた磁束密度 $\vec{B}$ との違いから，回路から十分離れた点 P での磁束密度 $\vec{B}_{\mathrm{ring}}$ を求めなさい。


z
P(x, y, z)
$\vec{r}$
C
B
S
$\vec{s}$
$d\vec{s}$
a
y
O
I
D
A
a
x

III

波に関する以下の問 1〜5 に答えなさい。

問 1　一様な媒質中を進行する古典的な波を考える。位置 x，時刻 t における波の変位を $u(x,t)$，波の速さを v として，一次元の波動方程式を書きなさい。

x 軸方向に進行する平面波は，複素表示を用いて

$$\tilde{u}(x,t) = u_0 \exp[i(kx - \omega t)],\ u(x,t) = \mathrm{Re}[\tilde{u}(x,t)],\ u_0 : \text{定数}$$

と表すことができる。平面波が波動方程式の解になっていることから，角振動数 ω と波数 k との間の関係 (これを分散関係という) を導きなさい。

問 2　一次元の粒子の運動も量子力学的にはシュレディンガーの波動方程式に従う波 $\psi(x,t)$ として記述される。$\psi(x,t)$ のもつ意味は古典的な波の場合とは異なるが，やはり平面波の解があり

$$\psi(x,t) = \psi_0 \exp[i(kx - \omega t)]$$

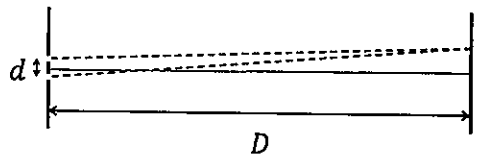
と表される。質量 m の粒子が一様なポテンシャル V の中を運動している場合の平面波の分散関係を導きなさい。ただし，$\hbar = h/(2\pi)$，h はプランク定数とする。

問 3　問 2 で得られた分散関係式と粒子の速さを v とした古典的エネルギーの表式とを対応させることにより，ドブロイ波長の表式 $h/(mv)$ が導かれることを示しなさい。

問 4　ネオン原子のドブロイ波を用いたヤングの複スリット型の干渉実験を考える。真空容器内でネオンの原子線を飛ばして単スリットの回折で広がらせた後，図のようにスリット間隔 d の複スリットを通し，複スリットからさらに下流へ距離 $D(\gg d)$ だけ離れた平面内にある粒子検出器に到達するネオン原子の数をカウントすることによって，干渉縞を観測する。ネオン原子のドブロイ波長が λ のとき，干渉縞の間隔を d, D, λ で表しなさい。

またここで，$d = 10\,\mu\mathrm{m}$，$D = 1\,\mathrm{m}$ の場合を考える。$100\,\mu\mathrm{m}$ より大きな間隔をもつ干渉縞が観測されるためには，ネオン原子の速度に対してどのような条件が必要であるかを，数値を示して説明しなさい。

ただし，重力の影響は無視してよいものとし，必要であれば以下の数値を用いなさい。
プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s
ネオン原子の質量 $m = 3.3 \times 10^{-26}$ kg



問 5　粒子が波動性を示すことは，電子，中性子，原子などを用いた干渉実験で実証されているが，巨視的な物体を用いた干渉効果は一般的には観測されない。その理由を説明しなさい。

IV

太陽から地球表面に垂直入射する単位面積，単位時間あたりのエネルギーは，近年衛星観測により正確に測定されており，その値は約 $1.366 \times 10^3\,\mathrm{W/m^2}$ であることがわかっている。以下の問 1〜5 に答えなさい。ただし，以下の数値を用いてよい。

地球の半径	$6.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$
太陽の半径	$7.0 \times 10^5\,\mathrm{km}$
地球から太陽までの距離	$1.5 \times 10^8\,\mathrm{km}$
光速	$3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

問 1　太陽が単位時間当たりに放出している全エネルギーを有効数字 2 桁で求めなさい。

問 2　太陽表面の放射率 ϵ を 1 として，太陽の表面温度を有効数字 1 桁で求めなさい。ただし，温度 T の物体が単位面積, 単位時間あたり放出する全エネルギーは $\epsilon\sigma T^4$ で与えられる。ここで σ はステファン・ボルツマン定数であり, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ とする。

問 3　黒体放射における単位面積当たりの放射強度スペクトルは

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}$$

という式で表される。ここで λ は電磁波の波長，h はプランク定数，c は光速，k_B はボルツマン定数を表す。この式の近似的な形を長波長の極限 $(hc/(\lambda k_B T) \ll 1)$, 短波長の極限 $(hc/(\lambda k_B T) \gg 1)$ それぞれの場合について求めなさい。

問 4　$I(\lambda)$ の概形を特徴がわかるように図示しなさい。また，太陽光を黒体放射とみなした場合, $I(\lambda)$ が最大値をとる波長は可視光の領域にあたる。可視光のおおよその波長範囲を答えなさい。

問 5　実際に地上で太陽光のスペクトルを観測すると, $I(\lambda)$ と比べてある特定のいくつかの波長の光強度が弱く観測されることが知られている。そのような原因としてどのようなことが考えられるか説明しなさい。また，なぜ連続的にではなく，特定の波長の光のみが弱く観測されるのか説明しなさい。